

N° d'Ordre : 5 (1974)

N° CNRS : AO 10126

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

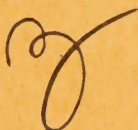
pour obtenir le grade de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

Gérard THIBAUT

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



COMMANDE OPTIMALE EN LIGNE DU TRAFIC URBAIN

Soutenue le 27 juin 1974 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV Président

M. Y. THOMAS

M. DAVID

M. FRANCERIES

M. BERNAY

} Examineurs

N° d'Ordre : 5 (1974)

N° CNRS : AO 10126

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

Gérard THIBAUT

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



COMMANDE OPTIMALE EN LIGNE DU TRAFIC URBAIN

Soutenue le 27 juin 1974 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV Président

M. Y. THOMAS

M. DAVID

M. FRANCERIES

M. BERNAY

} Examinateurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555012_0010

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. SPARSEL Pharmacie

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES -

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. PAUC	"
	M. PETRESCO	"
	M. RAFFIN	"
	M. PIRONNEAU (ENSM)	Mécanique
	M. RAVILLY (ENSM)	"
	M. TARDY (ENSM)	"
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLLOUD	"
	M. COLLET	"
	M. MINN	"
	M. MEZENECV (ENSM)	"
	M. MOUTON	"
	M. DUNOYER	Chimie
	M. GRAFF	"
	M. MARTIN	"
	M. PIERI	"
	M. QUINIOU	"
	M. ROUXEL	"
	M. WOJTKOWIAK	"
Professeurs associés	Mlle DEBRAUX	Biologie
	M. GARRIGUES	"
	Mme LE DOUARIN	"
	M. LE DOUARIN	"
	M. SELLIER	"
Professeurs sans chaire	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. BRARD (ENSM)	Mécanique
	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. IBISCH	"
	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	M. LE NOUR	"
	Mlle OFFRET (ENSM)	"
	M. ROSIER	"

Professeurs sans chaire M. GOBIN (ENSM)

M. TOURNOUX

Chimie

«

M. CHABANEL

Biologie

M. DUPONT

«

M. SAUDRAY

«

M. OTTMANN

Sciences de la Terre

Maîtres de Conférences M. DHOMBRES

Mathématiques

M. DO (ENSM)

«

M. GATESOUE

«

M. GAPAILLARD

«

M. LAMEAU (ENSM)

«

M. LEBORGNE

«

M. PHAN-THE-LAI (Chargé d'Enseignement)

«

M. VOGEL

«

M. DUBIGEON (Chargé d'Enseignement ENSM) Mécanique

M. GUEVEL (ENSM)

«

M. SULMONT (ENSM)

«

M. VAUSSY (Chargé d'Enseignement ENSM)

«

M. VILAINE (ENSM)

«

M. CAILLER (IUT)

Physique

M. LE BIHAN

«

M. LE CORRE (IUT)

«

M. LE MAITRE

«

M. LONCKE

«

M. THOMAS (Chargé d'Enseignement IUT)

«

M. BOUCHY (IUT)

Chimie

M. LE MAITRE (Chargé d'Enseignement IUT)

«

Mme MARTIN

«

M. POINTEAU (ENSM)

«

M. AMOURIQ

Biologie

M. LEBRUN

«

Mme NICOLAS-PRATT

«

M. FORESTIER

Sciences de la Terre

M. NICOLAS

«

Secrétaire Général : M. LERAY

A mes parents,

A ma femme

AVANT-PROPOS

Le travail que nous présentons ici a été entrepris au Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M., dirigé par Monsieur le Professeur R. MEZENCEV. Nous lui sommes très reconnaissants de nous avoir accueillis au sein de son équipe de recherche et d'avoir ainsi permis l'aboutissement de ces travaux.

Monsieur Y. THOMAS, Maître de Conférence à l'I.U.T. de Nantes, qui, grâce à son initiative, a contribué largement à la naissance et au développement de ce secteur de recherche, nous a toujours soutenu de sa bienveillante attention et prodigué de très nombreux conseils. Qu'il trouve ici nos remerciements les plus sincères.

Nous remercions également Monsieur DAVID, Chef du Département Métrologie et Automatisme à l'I.R.T., d'avoir considéré ce travail avec bienveillance et de participer aujourd'hui à notre Jury.

Nous sommes très reconnaissants à Monsieur FRANCERIES, Ingénieur en Chef du S.E.M. de la Communauté Urbaine de Bordeaux de nous avoir acceptés dans son service, nous permettant ainsi de mener à bien une partie importante de ce mémoire. Que Monsieur BERNAY, Adjoint Technique de ce même service, trouve ici nos remerciements les plus vifs pour l'aide précieuse qu'il nous a apportée.

Nous remercions enfin tous nos collègues chercheurs et agents techniques pour leur collaboration et leur excellente camaraderie.

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION	1
Première Partie - <u>THEORIE D'UNE COMMANDE OPTIMALE EN LIGNE D'UNE INTER-SECTION ISOLEE</u> -	5
Chapitre 1 - METHODES CLASSIQUES DE COMMANDE DES FEUX -	7
1.1 - Commande en boucle ouverte	7
1.2 - Commande en boucle fermée simple	9
Conclusion	15
Chapitre 2 - ETABLISSEMENT D'UN MODELE DE COMMANDE -	17
2.1 - Variables d'état, de commande, perturbations	17
2.2 - Etablissement d'un modèle d'une voie non saturée	19
2.3 - Etablissement d'un modèle d'une voie saturée	21
2.4 - Transition entre les deux régimes - Critère de saturation	22
2.5 - Représentation d'une intersection isolée	23
Conclusion	28
Chapitre 3 - REGULATION D'UNE INTERSECTION ISOLEE A CYCLE FIXE -	29
3.1 - Critère de régulation	29
3.2 - Calcul d'une commande en boucle fermée	31
3.2.1 - Régulation d'un carrefour non saturé	31
3.2.2 - Régulation d'un carrefour saturé	33
3.2.3 - Transition entre les deux régimes	35
3.3 - Résultats en simulation	41
Conclusion	41
Annexe 1 - Organigramme de commande	45

Chapitre 4 - DETERMINATION DES DEUX COMMANDES VERT ET CYCLE D'UNE INTERSECTION ISOLEE -	47
4.1 - Critère de régulation	49
4.2 - Régulation d'une intersection non saturée	50
4.3 - Régulation d'une intersection saturée	54
4.3.1 - Calcul du vert optimal	55
4.3.2 - Calcul du cycle optimal	57
4.4 - Transition entre les deux régimes	63
4.5 - Organigramme de commande et résultats en simulation	64
Conclusion	67
Annexe 1 - Calcul d'une séquence optimale de cycles	69
Bibliographie	73
Deuxième Partie - <u>APPLICATION SUR SITE DES ALGORITHMES DE COMMANDE</u> -	75
Chapitre 1 - PRESENTATION DU SITE -	77
1.1 - Description des infrastructures	77
1.2 - Fonctionnement des feux - Contraintes imposées	77
1.3 - Prise d'informations	81
1.4 - Moyens de calcul	82
Conclusion	82
Chapitre 2 - METHODES DE MESURE DES LONGUEURS DE QUEUE ET DES DEBITS D'ARRIVEE -	83
2.1 - Méthodes existantes de mesure des longueurs de queue	83
2.2 - Présentation des méthodes de mesure utilisées	87
2.3 - Validation des équations de mesure	89
Chapitre 3 - IMPLANTATION DES ALGORITHMES DANS LE SYSTEME INFORMATIQUE EXISTANT -	85
3.1 - Mesures directes sur le site	85
A - Mesures des débits de saturation et des temps perdus	85
B - Informations a priori	85
3.2 - Traitement des mesures en temps réel	88

3.3 - Organisation des tâches et commande des feux	101
3.4 - Fonctionnement en ligne	102
3.5 - Influence des erreurs de mesure	108
Conclusion	111
Bibliographie	112
 Troisième Partie - <u>COMMANDE EN LIGNE DES FEUX D'UN RESEAU</u> -	113
INTRODUCTION	114
 Chapitre 1 - MODELE LINEAIRE DE RESEAU -	119
1.1 - Etablissement d'un modèle linéaire de chaînon	119
1.1.1 - Choix du point de fonctionnement	122
1.1.2 - Linéarisation	125
1.2 - Extension à un réseau	126
Conclusion	132
 Chapitre 2 - SIMULATION DE LA COMMANDE EN LIGNE DES FEUX D'UN RESEAU -	135
2.1 - Critère de régulation	135
2.2 - Calcul d'une commande en boucle fermée	136
2.2.1 - Théorie	136
2.2.2 - Application	141
Conclusion	143
 Chapitre 3 - PROPOSITIONS POUR UNE APPLICATION EN LIGNE	153
3.1 - Calcul d'une commande sous-optimale	153
3.2 - Calcul d'une commande hiérarchisée	159
3.2.1 - Position du problème	159
3.2.2 - Optimisation des sous-systèmes	161
3.2.3 - Commandes de coordination	162
3.2.4 - Application à la commande d'un réseau quelconque	162
3.2.5 - Application à l'exemple de 4 carrefours en ligne	164
Conclusion	168
Bibliographie	170
CONCLUSION GENERALE	171

Annexe 1 - <u>MODELE NON LINEAIRE ET OPTIMALISATION STATIQUE D'UN CHAÎNON</u> -	175
A.1 - Calcul des longueurs de queue en fin de rouge	175
A.2 - Etablissement d'un modèle de chaînon	182
A.3 - Optimisation hors ligne de deux carrefours	183
A.3.1 - Critère de régulation	184
A.3.2 - Résultats de l'optimisation	185
A.4 - Difficultés d'extension à plus de deux carrefours	190
Annexe 1.1	195
Annexe 1.2	201
Annexe 2 - <u>MATRICES Φ', H, Q, R DE L'EXEMPLE DE RESEAU ETUDIE</u> -	203

INTRODUCTION

L'importance grandissante prise par les communications urbaines face au développement lent et insuffisant des infrastructures routières, a créé à l'intérieur des villes des situations de congestion de plus en plus pénibles lors de la formation des grands courants de trafic ; ces phénomènes, communs à toute grande ville et dus aux déplacements fréquents des habitants actifs vers leurs lieux de travail, sont à l'origine d'une perte de temps considérable et de nuisances importantes.

Ces problèmes ont incité, depuis quelques années, les responsables de la circulation à faire appel à des moyens électroniques et informatiques pour essayer d'apporter des remèdes -au moins partiels- à cette situation.

C'est dans les villes que les premières installations ont vu le jour, sans doute parce que les réseaux urbains sont mal adaptés au trafic moderne et donc tout particulièrement menacés par la congestion. Après une période expérimentale assez longue au cours de laquelle ont été lancées des opérations destinées à approfondir le phénomène circulation et à évaluer les avantages que procurerait un système de commande des feux, les villes ont pris de plus en plus conscience de la nécessité "de faire quelque chose" et ont en projet ou en cours de réalisation des installations opérationnelles.

Cependant, l'implantation d'un système complexe donc coûteux ne peut être envisagée que si les responsables de la circulation réussissent à prouver que la qualité, l'efficacité de la régulation et le bénéfice qu'en tirera la communauté prévaudront sur le coût des installations.

C'est donc le problème de la mesure de l'efficacité d'une régulation qui est ainsi posé et qui intéresse non seulement les chercheurs mais aussi le public en général. Cette évaluation ne peut se faire par simple mesure d'un paramètre mais par une analyse globale de toute la zone régulée, sans oublier les éléments importants qui sont les réactions psychologiques des conducteurs.

L'efficacité d'une régulation est subjective et sa mesure sera différente d'une ville à l'autre ; c'est donc dans chaque cas particulier, comprenant ses infrastructures propres et son environnement, que l'on pourra apprécier la qualité bonne ou médiocre d'une régulation.

Cette notion d'efficacité devient primordiale lorsqu'elle apparaît dans le dilemme qualité-coût, que nous avons déjà évoqué, et qui apparaît chaque fois que des moyens importants doivent être mis en oeuvre ; il importe donc d'essayer d'accroître le rendement d'un système de régulation et une

manière d'y parvenir consiste à élaborer des stratégies en rapport avec les moyens de calcul dont disposent maintenant les ingénieurs et les chercheurs.

C'est pourquoi, se sont créées et développées, d'abord aux Etats-Unis et maintenant en Europe, des équipes de recherches s'intéressant particulièrement à l'aspect théorique du phénomène circulation et à la recherche d'outils mathématiques puissants indispensables à la mise en oeuvre des systèmes de commande centralisée de grande envergure. Depuis quelques années seulement, l'Automatique a pris une part grandissante dans la résolution de ce type de problème en fournissant à l'ingénieur de trafic des méthodes nouvelles, rationnelles et efficaces de régulation et de commande.

La plupart des systèmes de commandes actuels, des plus simples aux plus élaborés, reposent souvent sur des stratégies à temps fixe consistant en des programmes préétablis de commande ou de coordination des feux ; ceux-ci sont mis en mémoire dans un calculateur central et sont sélectionnés en fonction de mesures globales prélevées sur le site. Ils conduisent en général à des résultats satisfaisants, mais ils supposent la circulation assez fluide et constante et réagissent donc mal à des perturbations imprévues.

C'est pourquoi, il nous a paru essentiel d'établir et de développer dans ce mémoire des stratégies de régulation mieux adaptées aux situations de congestion du trafic, que l'on rencontre de plus en plus fréquemment dans les villes et des méthodes de commande des feux en temps réel susceptibles de réagir assez vite aux fluctuations imprévues.

Pour l'automaticien, le trafic, dans un carrefour ou un réseau, est un processus quelconque caractérisé par des grandeurs de commande (verts, cycles décalages), des perturbations (variations de débits, incidents de circulation) et des grandeurs de sortie mesurables (vitesses, temps d'occupation...). Toutes ces grandeurs sont reliées entre elles par des relations mathématiques — systèmes d'équations différentielles — constituant le modèle mathématique du processus. La recherche de ces modèles relève du domaine de l'Automatique et constitue la phase d'identification du processus.

Traiter un problème de régulation de trafic revient à déterminer les commandes qui satisfont un critère de performances ; les méthodes usuelles de l'Automatique sont, ici encore, bien adaptées à ce type de problème.

C'est dans cet esprit qu'a été abordée la régulation du trafic présentée dans ce mémoire. Notre travail se subdivise en trois parties distinctes : l'étude théorique de la régulation d'un carrefour, l'application sur site des résultats obtenus et la régulation théorique d'un réseau de plusieurs carrefours.

La première partie, après avoir exposé quelques méthodes classiques de commande des feux d'un carrefour, est consacrée à la recherche de modèles

mathématiques caractérisant le trafic à une intersection. Ces modèles, obtenus dans le cas d'une circulation fluide et dans le cas d'un régime saturé, sont utilisés pour deux applications particulières de commande :

- le calcul du vert lorsque l'intersection fonctionne à cycle fixe,
- le calcul des deux paramètres de régulation : cycle et vert.

Cette étude débouche sur des algorithmes de commande en temps réel, facilement applicables en ligne, fournissant des commandes en boucle fermée sur les longueurs de queues et les débits d'arrivée.

La seconde partie est une application sur site des systèmes de commande optimale précédemment définis. Le carrefour étudié comporte deux voies d'accès : c'est l'un des plus importants d'un axe coordonné. L'application pratique nécessitant la mesure de longueurs de queue, une mise au point est faite sur les différents moyens de mesure possibles, puis on propose une méthode générale fondée sur une utilisation particulière des capteurs de présence. Lorsque cette méthode est validée, on procède à une implantation des algorithmes de commande dans le système informatique existant, suivie d'un fonctionnement en ligne de l'ensemble.

La troisième partie concerne la régulation de réseaux comprenant un nombre quelconque de carrefours. Elle débute par l'étude de deux carrefours en ligne et la recherche de modèles mathématiques caractérisant le trafic, modèles non linéaires difficilement exploitables en ligne mais qui permettront cependant de dégager des conclusions importantes sur les valeurs optimales du cycle et des décalages. On décide ensuite d'étudier le trafic dans un réseau dans des conditions bien déterminées et fixées par le volume des véhicules désirant le traverser. Il est alors possible d'utiliser un modèle mathématique linéaire dont l'exploitation conduit à un système de commande optimale en boucle fermée sur tous les états du réseau (longueurs de queue). Malheureusement, le nombre de calculs à effectuer en ligne étant trop important, il nous faut envisager une méthode de commande sous-optimale, dont le principal objectif est de réduire considérablement le nombre d'opérations à effectuer. Enfin, le fonctionnement d'un réseau devant être assuré quelles que soient les conditions environnantes, l'implantation des algorithmes de commande est envisagée selon une structure hiérarchisée dans laquelle les décisions sont prises à deux niveaux : le niveau local assure la commande de chaque carrefour isolé, puis les coordinateurs assurent, au second niveau, l'interdépendance de ces carrefours entre eux.

On illustre enfin ces différents systèmes de commande par quelques essais en simulation.

Première Partie

THEORIE D'UNE COMMANDE OPTIMALE EN LIGNE
D'UNE INTERSECTION ISOLEE

Chapitre 1

METHODES CLASSIQUES DE COMMANDE DES FEUX

Les paramètres des feux de régulation de carrefours isolés sont actuellement, soit préfixés (les durées de cycle et de vert sont déterminées une fois pour toutes), soit adaptatifs (les paramètres des feux varient en fonction du trafic). Nous examinerons successivement ces deux types de régulation, dits respectivement en boucle ouverte et en boucle fermée, et nous dégagerons la philosophie d'un type de régulation encore peu employé, celle en boucle fermée avec modèle qui retiendra notre attention tout au long de ce mémoire.

1.1 - COMMANDES EN BOUCLE OUVERTE

Les méthodes de commande en boucle ouverte ont été les premières développées et restent encore très employées. Nous conviendrons de dire qu'elles comprennent toutes les méthodes calculant une fois pour toutes la durée de cycle et la répartition en phases et aussi celles qui permettent le changement de ces paramètres à certaines heures de la journée en fonction de situations de référence choisies. Nous rappelons quelques méthodes de calcul des paramètres de régulation des feux d'un carrefour en précisant pour chacune d'elles les situations de trafic choisies et le critère de calcul.

A) Formule de Webster [7]

Cette relation permet de calculer la durée de cycle et la répartition en phases qui minimisent le retard total des véhicules dans l'intersection. Les débits de saturation et les débits d'arrivée sont supposés constants et choisis à un moment de la journée où l'intersection est la plus chargée.

Si q_i , s_i sont les débits d'arrivée et de saturation de la voie n°i du carrefour, la longueur du cycle c et la répartition de ce cycle en phases sont :

$$c = \frac{1,5L + 5}{1 - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{s_i}} \quad \text{avec} \quad \frac{g_i}{g_j} = \frac{q_i/s_i}{q_j/s_j}$$

où g_i désigne la durée de la phase verte n°i et L la somme des temps perdus par l'ensemble des véhicules, c'est-à-dire la somme pour chaque phase de trois éléments : le temps de jaune, le temps de réaction au vert et le temps de rouge intégral.

Des extensions de cette formule établies par le Road Research Laboratory permettent de traiter la plupart des cas particuliers qui peuvent se présenter à un carrefour : phases spéciales, anticipation d'un mouvement particulier dans une phase, etc...

Ces formules sont les plus complètes et les plus utilisées. Leur inconvénient principal est que ce cycle est calculé pour un carrefour chargé, ce qui donne en général un cycle trop long dans les autres conditions. D'autre part, en période de saturation, cette formule devient inutilisable.

B) Méthode de Greenshield |3|

Cette méthode suppose les débits d'arrivée poissonniens et calcule en fonction des paramètres des feux (cycle et vert) la probabilité (P) pour qu'une phase soit saturée (probabilité de défaillance) ; son expression est :

$$P = \sum_{N+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!}$$

avec : T la valeur du vert de cette phase

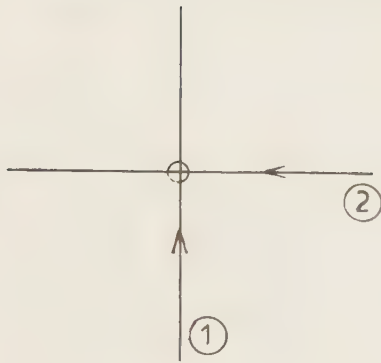
λ le débit moyen d'arrivée

N le nombre maximum de véhicules que peut écouler cette phase

La méthode de calcul est alors la suivante : on choisit une durée de cycle arbitraire que l'on répartit entre phases proportionnellement au trafic de celles-ci. On peut alors calculer la probabilité de défaillance (c'est-à-dire de saturation d'une voie), de ces diverses phases et rechercher par approximations successives la valeur du cycle telle que ces probabilités calculées soient inférieures à une valeur préfixée, par exemple 5 %.

C) Formule de Wardrop |6|

Cette formule permet de déterminer le cycle minimal permettant d'écouler le trafic sur toutes les voies, dans l'hypothèse d'un trafic uniforme.



Soit q_1 , s_1 et q_2 , s_2 les débits d'arrivée et de saturation des voies 1 et 2, V et C le vert et le cycle. Par définition, la voie 1 ne sera pas saturée si :

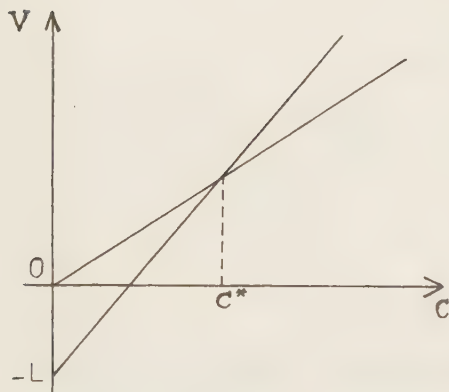
$$q_1 C < s_1 V$$

La voie 2 ne le sera pas si :

$$q_2 C < s_2(C-V-L)$$

Fig. 1.1

Ces deux conditions représentées dans le plan (V, C) conduisent au cycle minimum (C^*) permettant d'écouler le trafic.



$$C^* = \frac{L}{1 - \frac{q_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}}$$

Fig. 1.2

1.2 - COMMANDE EN BOUCLE FERMÉE SIMPLE (SANS MODELE DYNAMIQUE)

Les paramètres des régulations à temps fixe décrites précédemment, sont calculés pour une situation de référence bien déterminée et sont insensibles aux fluctuations aléatoires du trafic, ce qui entraîne fréquemment une mauvaise utilisation des phases vertes. C'est pourquoi les politiques de commande en boucle fermée, qui utilisent en permanence des mesures effectuées sur site, ont été développées pour s'adapter à ces fluctuations.

Si ces mesures agissent directement sur la commande des feux, c'est-à-dire sans qu'il y ait de calculs utilisant un modèle dynamique, on est en présence d'une boucle fermée simple.

La politique à temps fixe multiprogrammes (§ précédent), poussée à l'extrême, avec changement de programme par détection du trafic, pourrait être considérée comme une boucle fermée simple ; elle consisterait à rechercher, à chaque fin de cycle, les différentes commandes comme en temps fixe.

Les méthodes présentées ci-dessous utilisent une ou plusieurs mesures effectuées sur site ; elles ne se différencient en fait que par la fonction qui est affectée au capteur.

- Commande par le "trafic simple" |4|

Elle est utilisée en zone urbaine lorsque les détecteurs de présence des véhicules peuvent être placés près des feux. Son principe est le suivant : A partir du début d'une phase verte, on prolonge le vert jusqu'à une valeur minimum V_m . Si un véhicule se présente, la phase verte est étendue d'un laps de temps Δt de longueur fixe ou variable avec la vitesse du véhicule ; si un autre véhicule se manifeste sur la phase verte pendant un intervalle I appelé intervalle voiture, on prolonge de nouveau le vert de Δt . La phase verte cessera sur cette voie si :

- la longueur du vert dépasse une valeur maximum V_M
- l'intervalle voiture excède I
- il n'y a pas eu de véhicule sur le détecteur.

L'intérêt principal de cette méthode réside dans le fait qu'elle s'adapte aux variations de trafic aussi bien en volume qu'en répartition sur les diverses branches du carrefour.

- Commande par "le trafic à volume - densité"

Elle est utilisée pour des carrefours importants ayant des vitesses d'approche assez grandes. Les détecteurs sont positionnés assez loin de la ligne d'arrêt. L'algorithme de commande est identique à celui de commande par le trafic simple, moyennant certaines améliorations :

- le vert minimum est variable
- l'intervalle voiture I tient compte de la charge d'ensemble du carrefour ; on définit :

$I_q = f_1(q)$ fonction du débit de la file qui a le vert,

$I_n = f_2(n)$ fonction du nombre de véhicules à l'arrêt
sur la phase qui a le rouge ,

$I_t = f_3(t)$ fonction du temps pendant lequel le premier
véhicule a attendu.

On choisit $I = \min (I_q, I_n, I_t)$

Cette méthode s'est révélée expérimentalement très bonne pour un critère combinant les retards et les nombres d'arrêts des véhicules au carrefour |4|.

- Commande par "le trafic à mesure de taux d'occupation"

Cette méthode est mise en oeuvre à l'aide du contrôle du taux d'occupation d'une boucle. C'est le rapport du temps pendant lequel elle est occupée sur le temps que dure l'observation. Le principe de l'algorithme est alors le suivant : la durée du vert est calculée par un intégrateur qui provoque un changement de phase lorsqu'il atteint un certain niveau. Le signal intégré est une succession de crêteaux d'amplitude α lorsqu'un véhicule est présent sur la boucle et β lorsqu'elle est inoccupée ($\beta > \alpha$).

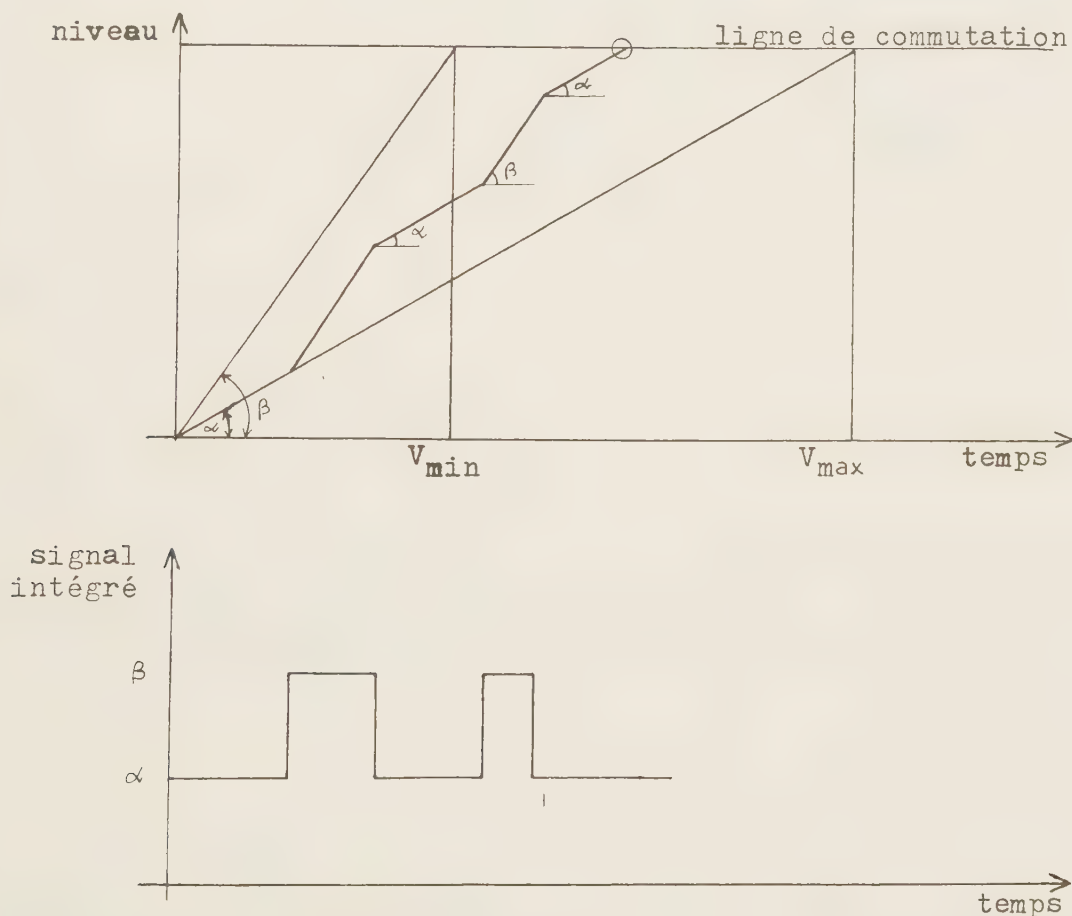


Fig. 1.3

Les valeurs extrêmes $V_{\min}$ et $V_{\max}$ sont réglables très facilement, ce qui permet une adaptation très souple à un grand nombre de carrefours.

- Commande par "le trafic à évacuation complète"

Cette politique donne le vert sur une voie tant que tous les véhicules arrêtés à la fin du rouge précédent ne sont pas évacués. Une réalisation

exacte de cette méthode suppose l'existence d'un détecteur de longueur de queue. On a démontré théoriquement et vérifié pratiquement que c'est cette politique qui conduit au retard minimum pour des débits moyens (aux débits faibles, il est préférable de prolonger le vert après évacuation complète, aux débits forts, il vaut mieux couper le vert avant évacuation). D'autre part, pour des raisons psychologiques, on doit imposer une valeur maximum de vert. L'inconvénient principal de cette méthode est d'arrêter à peu près tous les véhicules une fois.

DUNNE et POTTS [2] ont proposé un algorithme linéaire de calcul fondé sur le principe ci-dessus ; il est stable pour des conditions de non saturation. Deux sortes d'hypothèses sont envisagées :

- les débits d'arrivée et de départ constants
- les débits d'arrivée et de départ aléatoires

Pour une intersection ne comportant que deux voies d'approche directes, on définit :



Fig. 1.4

$n_i(t)$ nombre de véhicules de la queue i ,

$$f_i(t) = \alpha_i n_i(t) + \beta_i - n_{i+1}(t)$$

la fonction de contrôle où α_i et β_i sont des coefficients à déterminer.

$T(t)$ temps écoulé depuis le dernier changement de phase

r_i, R_i minimum et maximum des durées de phase de la voie i .

L'algorithme de contrôle est alors représenté par l'organigramme suivant :

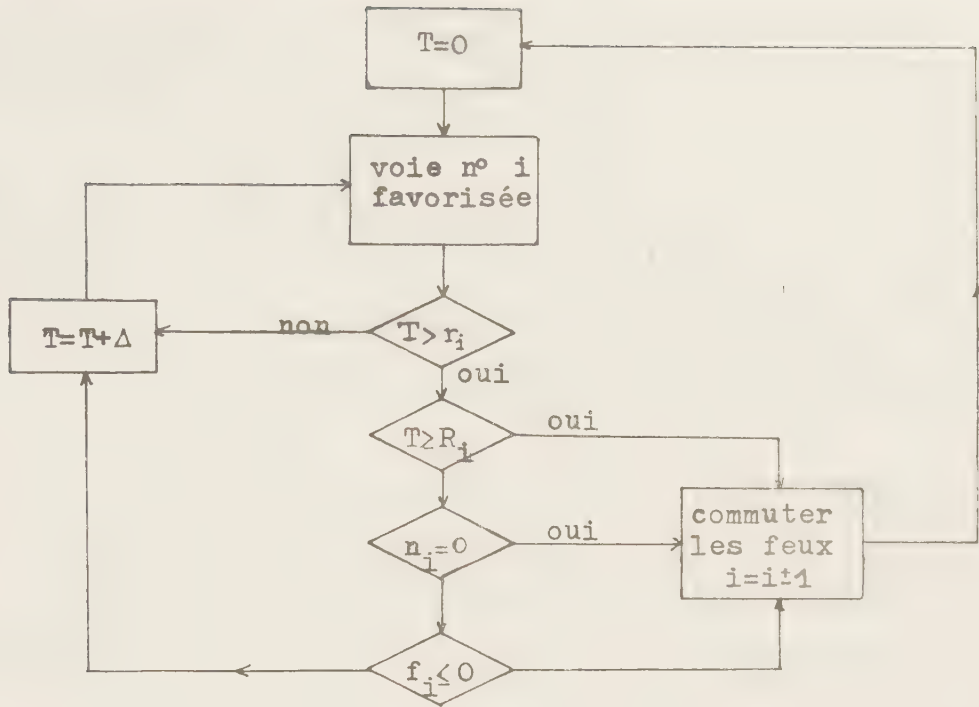


Fig. 1.5

L'opération effectuée par l'algorithme peut s'exprimer mathématiquement, soit en considérant des taux d'arrivée constants et les grandeurs $n_i(t)$ continues, soit en considérant des débits aléatoires et les grandeurs $n_i(t)$ comme des variables aléatoires discrètes.

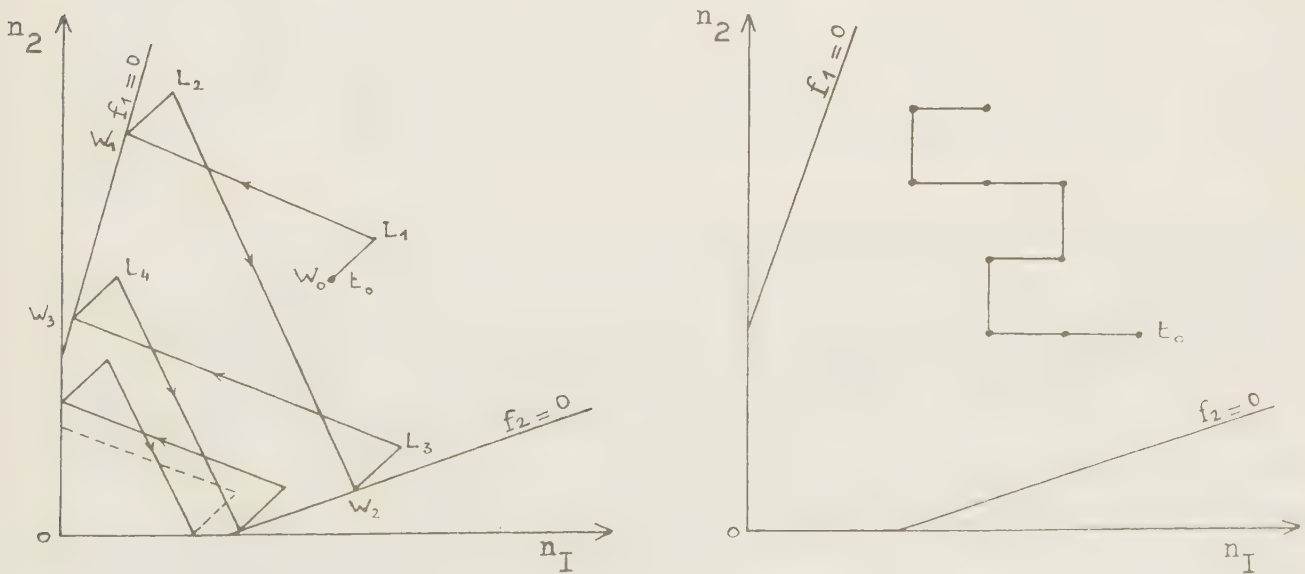


Fig. 1.7

Représentation continue des longueurs de queue (fig. 1.7 a)

Dans le plan des longueurs de queue (n_1, n_2) , le point de fonctionnement se déplace à partir d'un état initial donné (t_0) sur des segments de droite de pentes constantes $W_0 L_1 W_1 L_2 W_2 L_3 \dots$

Si q_1, q_2, s_1, s_2 sont les débits d'arrivée et les débits de saturation des voies 1 et 2, ℓ le temps perdu par phase (temps de réaction au vert et fraction du jaune), les pentes de ces segments de droite sont :

$$\text{Segments } W_j L_{j+1} : \frac{q_2}{q_1} \text{ (temps perdu)}$$

$$\text{Segments } L_{2j} W_{2j} : \frac{s_2 - q_2}{q_1} \text{ (la queue } n_2 \text{ diminue)}$$

$$\text{Segments } L_{2j+1} W_{2j+1} : \frac{q_2}{s_1 - q_1} \text{ (la queue } n_1 \text{ diminue)}$$

On peut montrer que ce système est stable si la quantité $\frac{q_1}{s_1} + \frac{q_2}{s_2}$ est inférieure à 1, ce qui se traduit par un cycle limite dans le plan (n_1, n_2) , d'où l'on extrait les commandes suivantes :

$$\text{Longueur du cycle } c : c = \frac{2\ell}{1 - \frac{q_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}}$$

$$\text{Durée des phases vertes } g_1, g_2 : g_1 = \frac{2\ell \frac{q_1}{s_1}}{1 - \frac{q_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}}$$

$$g_2 = \frac{2\ell \frac{q_2}{s_2}}{1 - \frac{q_2}{s_2} - \frac{q_1}{s_1}}$$

La méthode exposée au chapitre 4 nous permettra de retrouver ces résultats par un autre moyen de calcul.

Représentation discrète des longueurs de queue (fig. 1.7 b)

Dans ce modèle, les arrivées suivent une loi binomiale qui a pour paramètres P_i , la probabilité d'une arrivée sur la voie i pendant l'intervalle de temps $[k\tau, (k+1)\tau]$. Cet intervalle est choisi de manière à ne laisser passer qu'un seul véhicule.

Dans le plan (n_1, n_2) , le point de fonctionnement se déplace donc parallèlement aux axes selon certaines probabilités et sa trajectoire suit la théorie des marches aléatoires avec barrières réfléchissantes.

Un état d'équilibre statistique existe si le carrefour n'est pas saturé, c'est-à-dire si la condition suivante est remplie.

$$p_1 p_2 < (1-p_1) (1-p_2)$$

On peut en extraire comme précédemment les moyennes et variances des durées de cycle et de phases.

L'algorithme de DUNNE et POTTS a été peu appliqué à cause de l'absence de détecteurs de longueurs de queue. Son application sur site, très simple à mettre en oeuvre en temps réel, permettrait d'obtenir de bons résultats en régime non saturé et pour des débits d'arrivée moyens.

Conclusion :

Les quelques méthodes de commande des feux exposées dans ce chapitre donnent un aperçu des moyens actuels dont disposent les ingénieurs de trafic pour faire face à un problème de circulation. Elles peuvent se classer en deux catégories :

Les méthodes de commande en boucle ouverte fournissent les commandes (vert et cycle) pour une situation de référence donnée. Elles ne sont valables que si le comportement du processus et l'évolution des perturbations peuvent être prédits à long terme d'une manière très précise et ce une fois pour toutes. L'emploi d'enquêtes de circulation permet d'avoir une connaissance des grandes lignes de l'évolution du trafic (débits horaires, heures de pointe ...) ; cependant, d'importantes fluctuations peuvent intervenir autour de ces évaluations et engendrent des perturbations que ne peut contrecarrer un système en boucle ouverte.

Les systèmes en boucle fermée simple permettent de pallier ces inconvénients grâce à certaines mesures prélevées continûment ou périodiquement (taux d'occupation, longueurs de queues ...). Les grandeurs de commande tiennent compte d'informations sur l'état présent du carrefour et permettent ainsi de réagir aux perturbations.

On conçoit cependant qu'un système sera mieux piloté si, au moment du calcul de la commande, on est capable de prédire son comportement futur ; les méthodes de commande en boucle fermée avec modèle permettent de concrétiser cette idée. Elles utilisent pour ce faire un plus grand nombre d'informations

sous forme de mesures et nécessitent l'élaboration d'un modèle mathématique dynamique du processus, voire même d'un modèle de perturbations. Le développement de telles méthodes constitue l'objet de ce mémoire.

Un modèle mathématique est constitué d'un ensemble d'équations décrivant avec plus ou moins de précision le comportement du processus. En circulation, ces équations peuvent être très simples ou très compliquées selon que l'on représente le phénomène sous une forme macroscopique (fonctionnement global d'une voie, d'un réseau) ou microscopique (comportement du véhicule). Dans le premier cas, les modèles obtenus seront le plus souvent insérés dans les boucles de commande des systèmes pour assurer leur fonctionnement en temps réel (modèles de commande). Ils doivent être suffisamment simples pour permettre un traitement et une utilisation rapides et suffisamment précis pour refléter correctement le comportement du processus.

Les modèles du deuxième type sont destinés à être substitués au processus lui-même ; ils doivent, pour une expérience donnée, fournir les mêmes résultats que ceux observés sur site. A cause de la taille et de la complexité de ses équations, ces modèles, dits d'étude, seront le plus souvent utilisés en simulation.

La recherche de modèles de commande peut être entreprise de deux manières différentes :

Si les phénomènes physiques intervenant au sein du processus sont très compliqués ou inconnus, on essaie d'élaborer un modèle uniquement à partir d'observations et d'enregistrements (mesures d'entrées-sorties par exemple). Un traitement mathématique hors ligne de ces enregistrements, permet alors de déterminer la structure et les paramètres des équations.

La deuxième manière consiste à établir les équations mathématiques du modèle de commande après une analyse complète et détaillée du fonctionnement du processus. Elle nécessite donc une certaine connaissance a priori des phénomènes physiques.

La première étape de la mise en place d'un système de commande en boucle fermée prédictive est donc la recherche d'un modèle de commande. La connaissance que l'on a à priori du phénomène circulation nous suggère d'utiliser la seconde manière pour l'élaboration des équations que nous présentons dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

ETABLISSEMENT D'UN MODELE DE COMMANDE

On établit dans ce chapitre un modèle macroscopique de voie de circulation abordant une intersection signalisée. Nous garderons toujours à l'esprit que ce modèle doit être le plus simple possible de manière à simplifier l'implantation des algorithmes de commande sur ordinateur et à rendre possible le fonctionnement en temps réel.

Après avoir défini toutes les grandeurs intervenant dans notre modèle, nous aborderons la représentation du fonctionnement global d'une voie dans le cas non saturé et le cas saturé, le problème de la commutation entre ces deux régimes et enfin la représentation globale d'une intersection isolée.

2.1 - VARIABLES D'ETAT, DE COMMANDE, PERTURBATIONS

On ne considérera dans la suite qu'un seul type d'intersection à 4 branches fonctionnant en deux phases, l'extension à des carrefours possédant un nombre de phases supérieur n'offrant théoriquement pas de difficultés supplémentaires.

Dans l'esprit de l'automaticien, un carrefour est un processus quelconque que l'on peut représenter par la figure 1.8, piloté par des grandeurs de commande et dont l'évolution dynamique est caractérisée par une ou plusieurs équations différentielles ou récurrentes. Le fonctionnement du processus est observé à travers des mesures (signaux de sortie), souvent entachées d'erreurs. Enfin, des perturbations, grandeurs indépendantes, modifient le comportement du système.

Revenons sur ces diverses définitions et sur leur signification en trafic urbain.

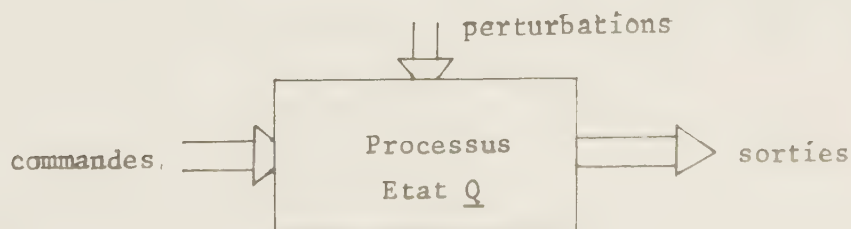


Fig. 1.8

Les moyens de commande dont on dispose sont essentiellement les feux. Choisir une commande consistera donc à déterminer les instants de commutation d'un signal discret qui ne prend théoriquement que deux valeurs (vert, rouge). Evidemment, ces commandes n'agissent pas directement sur les véhicules, puisqu'entre en ligne de compte un intermédiaire essentiel qui est le conducteur, ce qui rend le lien feu-véhicule assez lâche.

On choisit de représenter l'état du carrefour par un vecteur (vecteur d'état) contenant l'ensemble des longueurs de queue à la fin du signal rouge. Une ou plusieurs équations récurrentes liant ces grandeurs reflèteront le comportement dynamique de ce carrefour.

La régulation envisagée aux chapitres 3 et 4 nécessite la connaissance de ce vecteur d'état ; nous verrons dans la deuxième partie de ce mémoire comment a été résolu ce problème de mesure des longueurs de queue.

Les signaux de sorties observables sur le processus sont uniquement des impulsions délivrées par des capteurs de différents types et indiquant la présence ou l'absence de véhicules. On traite en général ces sorties pour en faire des grandeurs utilisables dans une régulation (débits, taux d'occupation, longueurs de queue ...). Le processus initial se trouve donc complété par une unité de traitement des informations réalisée le plus souvent par des modules logiques ou analogiques (fig. 1.9).

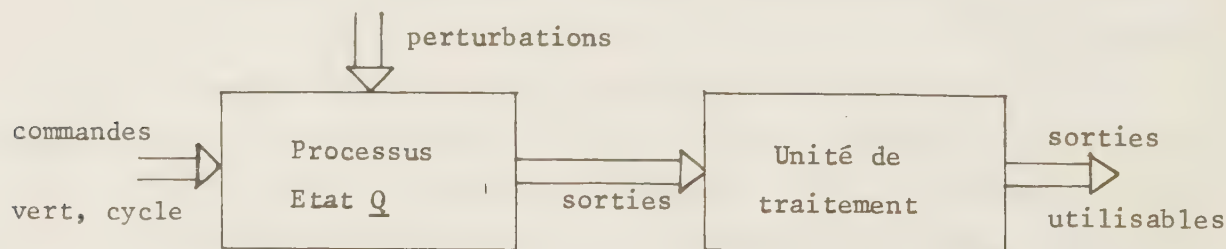


Fig. 1.9

Les perturbations agissent sur les sorties de diverses manières, et sont dues au comportement anormal du trafic (ralentissements intempestifs, accidents, conditions météorologiques ...) et aux incertitudes de mesures engendrées par la nature même des capteurs.

2.2 - ETABLISSEMENT D'UN MODELE D'UNE VOIE NON SATUREE

Par définition, une voie de circulation abordant une intersection signalisée n'est pas saturée si aucun véhicule n'est à l'arrêt à la fin du feu vert.

Un feu est pratiquement constitué de trois états (rouge - vert - jaune). On considérera ici que le feu ne possède que deux états vert efficace, rouge efficace, une partie du jaune pouvant être considérée comme vert, l'autre partie comme rouge.

Représentons l'évolution d'une voie de circulation dans le diagramme espace-temps.

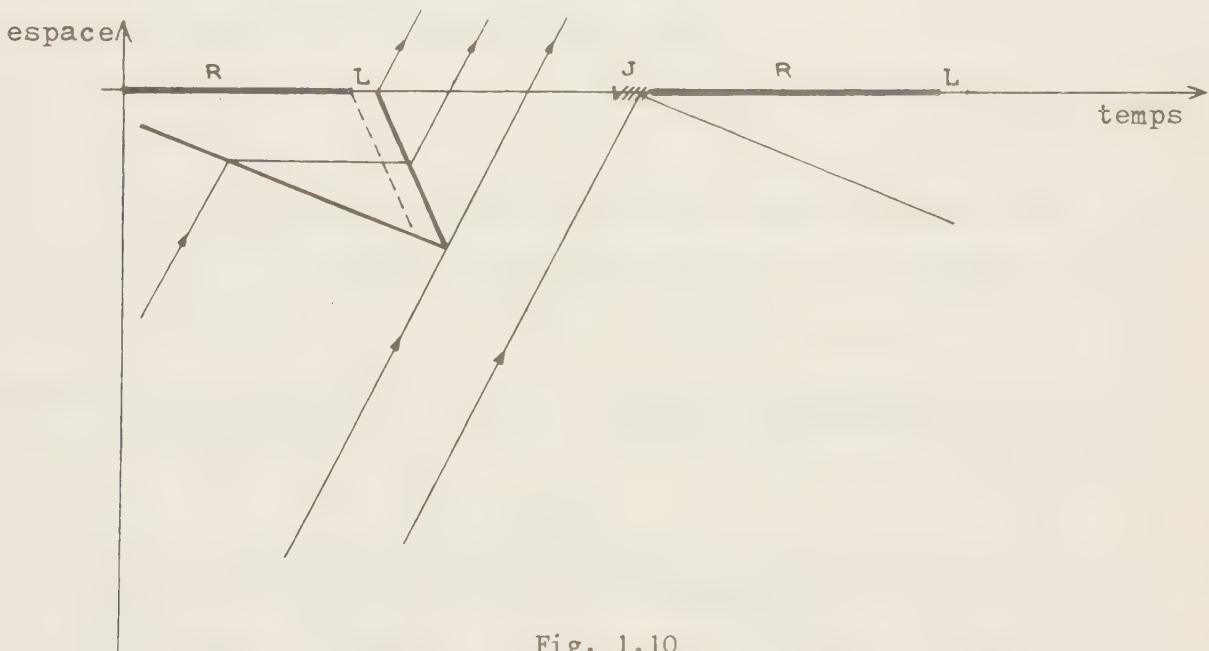


Fig. 1.10

La zone comprise entre les zones de décélération et d'accélération représente l'ensemble des véhicules arrêtés. Sur ce cas de figure, la voie n'est pas saturée, c'est-à-dire qu'à la fin du vert, il n'y a aucun véhicule en attente.

L désigne un retard dû à la montée en vitesse du peloton de véhicules.

L'évolution de la longueur de queue peut aussi se représenter par le diagramme suivant :



Fig. 1.11

avec les notations :

$Q(t)$, $Q(t_1)$ longueurs de queue à la fin du rouge

L retard dû à la montée en vitesse du peloton

$t_1 - t = c_t$ longueur du cycle

$t' - t = V_t$ longueur du vert efficace

On notera d'autre part :

$A(t)$ le débit instantané d'arrivée en véh/s.

$S(t)$ le débit d'écoulement sur la ligne des feux

L'équation régissant l'évolution des longueurs de queue en fin de rouge est :

$$Q(t_1) = \int_{t'}^{t_1} A(t) dt$$

Remarquons que cette longueur de queue $Q(t_1)$ est indépendante de $Q(t)$ d'après l'hypothèse de non-saturation.

Soit A_t la valeur moyenne du débit d'arrivée sur le cycle $|t, t_1|$; on a alors :

$$Q(t_1) = \int_{t'}^{t_1} A(t) dt = \int_{t'}^{t_1} [A_t + W(t)] dt$$

$W(t)$ composante aléatoire continue se superposant à la valeur moyenne.

$$Q(t_1) = A_t(t_1 - t') + \int_{t'}^{t_1} W(t) dt = A_t \cdot R_t + \int_{t'}^{t_1} W(t) dt$$

que l'on notera :

$$Q(t_1) = (C_t - V_t) A_t + \delta_t$$

Si l'arrivée des véhicules n'est pas perturbée par la présence de carrefours voisins, on conçoit que la forme du débit d'arrivée $A(t)$ soit imprévisible d'un cycle à l'autre.

On peut alors considérer que cette séquence δ_t est aléatoire et de moyenne nulle, ce qui nous permettra dans la suite de simplifier les équations en ne considérant que des valeurs moyennes de débit sur un cycle.

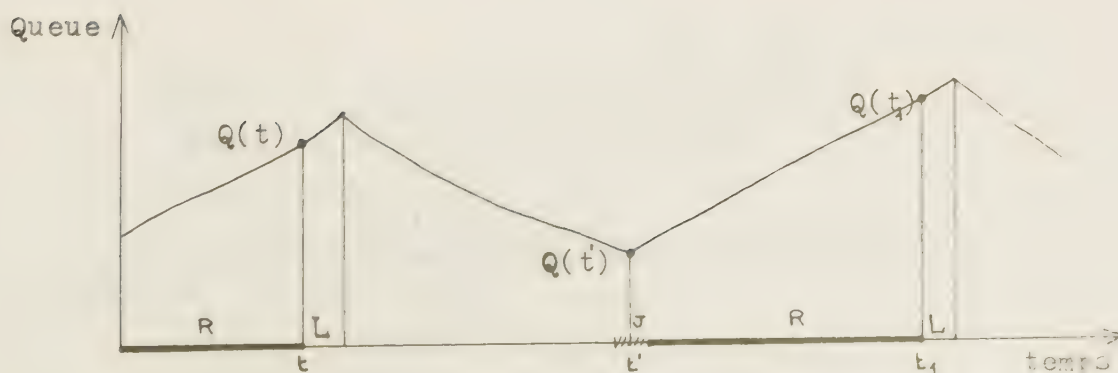
2.3 - ETABLISSEMENT D'UN MODELE DE VOIE SATURÉE

On dira que la voie est saturée s'il reste des véhicules en attente à la fin du vert.

Avec les mêmes conventions que dans le paragraphe précédent, représentons l'évolution des longueurs de queue dans le diagramme espace-temps, puis dans le diagramme conventionnel queue-temps.



Fig. 1.12



La transition entre les régimes non saturé (1) et saturé (2) aura lieu lorsque la longueur de queue $Q(t')$ sera nulle.

Or :

$$Q(t') = Q(t) + \int_t^{t+L} A(t) dt + \int_{t+L}^{t'} |A(t) - S(t)| dt = 0$$

soit, en simplifiant d'après les hypothèses précédentes :

$$Q(t) + S_t L = (S_t - A_t) V_t$$

On en déduit donc les deux modes de fonctionnement possibles :

$$\text{si } \frac{Q(t) + S_t L}{S_t - A_t} \leq V_t \text{ les équations sont celles du régime non saturé}$$

$$\text{si } \frac{Q(t) + S_t L}{S_t - A_t} > V_t \text{ les équations sont celles du régime saturé}$$

2.5 - REPRESENTATION D'UNE INTERSECTION ISOLEE

Après avoir calculé des modèles mathématiques macroscopiques d'une voie de circulation abordant un carrefour, nous allons déterminer les équations générales de l'intersection dans les cas saturé et non saturé pour le cas particulier d'un carrefour à deux branches. L'extension à des carrefours plus compliqués ne présente pas de difficultés.

- Organisation des feux

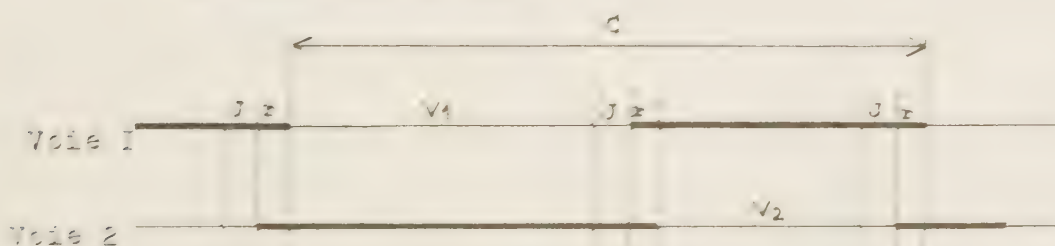


Fig. 1.14

avec : J : longueur du jaune ; en général 3 secondes

r : longueur du rouge intégral (2 secondes)

C : la longueur du cycle

V_1 et V_2 : les durées de verts sur les voies 1 et 2

$$V_1 + 2 (J+r) + V_2 = C$$

soit r' la fraction du jaune considérée comme rouge, la relation entre les verts efficaces est :

$$V_e^1 + V_e^2 + 2(r+r') = C$$

- Modèle d'une intersection non saturée

Les deux voies abordant l'intersection sont supposées non saturées, c'est-à-dire que les queues disparaissent en fin de vert.

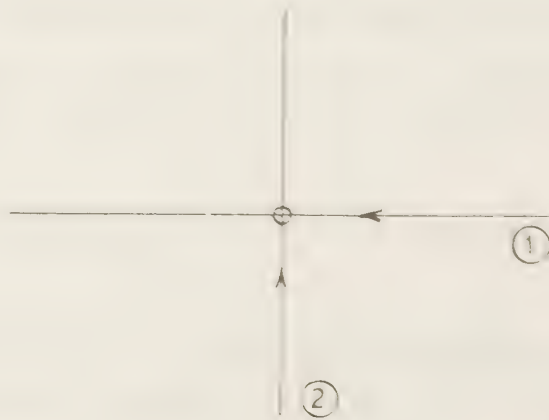


Fig. 1.15

Représentons l'évolution des longueurs de queues sur les deux voies par les diagrammes suivants :

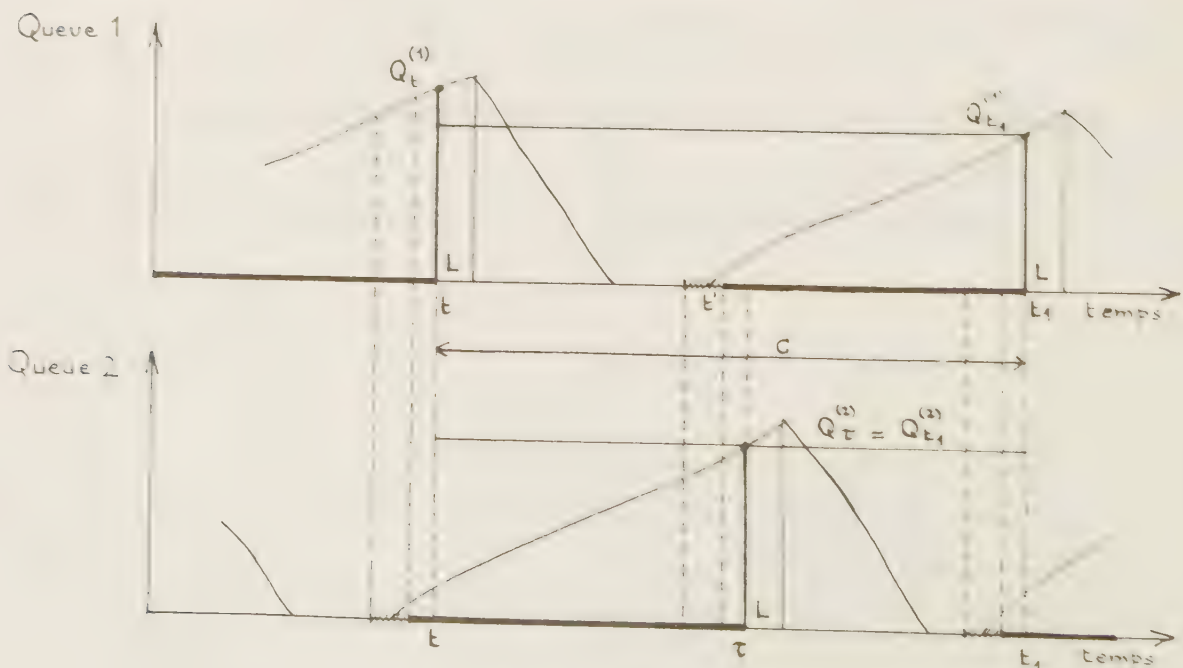


Fig. 1.16

On note : τ l'instant de fin de rouge sur la voie 2

$A_t^{(1)}, A_t^{(2)}$ les débits moyens d'arrivée sur les voies 1 et 2

$Q_t^{(1)}, Q_t^{(2)}$ les longueurs de queue sur les voies 1 et 2

La difficulté est, ici, que les instants de fin de rouge sur la voie 1 sont approximativement les instants de fin de vert sur la voie 2 ; l'état d'une voie étant caractérisé par les longueurs de queue en fin de rouge, il en résultera que les états ne pourront être pris aux mêmes instants.

Il est bon, pour alléger les notations, de ramener les deux longueurs de queue fin rouge aux mêmes instants ; on supposera donc que, à l'instant t_1 , la longueur de queue reste constante et égale à :

$Q_{t_1}^{(1)}$ sur la voie 1

$Q_{t_1}^{(2)}$ sur la voie 2

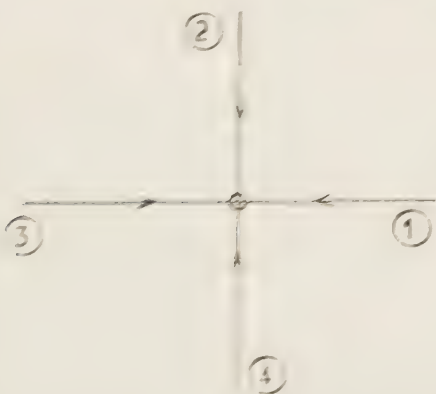
Les équations de fonctionnement deviennent alors :

$$Q_{t_1}^{(1)} = (C_t - V_t) A_t^{(1)} + i_t^{(1)}$$

$$Q_{t_1}^{(2)} = Q_{t_1}^{(2)} = (V_t + 2(r+r')) A_t^{(2)} + i_t^{(2)}$$

en posant $V_t = \tau - t$ la longueur du vert effectif.

Les équations précédentes, établies pour un carrefour à deux branches, s'étendent facilement à un carrefour à quatre branches.



$$Q_{t_1}^{(1)} = (C_t - V_t) A_t^{(1)} + i_t^{(1)}$$

$$Q_{t_1}^{(2)} = (V_t + 2(r+r')) A_t^{(2)} + i_t^{(2)}$$

$$Q_{t_1}^{(3)} = (C_t - V_t) A_t^{(3)} + i_t^{(3)}$$

$$Q_{t_1}^{(4)} = (V_t + 2(r+r')) A_t^{(4)} + i_t^{(4)}$$

Fig. 1.17

Soit sous forme vectorielle : $Q_{t_1} = \sum V_t + \underline{r}_t + i_t$ avec :

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{t_1} &= \begin{bmatrix} Q_{t_1}^{(1)} \\ Q_{t_1}^{(2)} \\ Q_{t_1}^{(3)} \\ Q_{t_1}^{(4)} \end{bmatrix} & \underline{B}_t &= \begin{bmatrix} -A_t^{(1)} \\ A_t^{(2)} \\ -A_t^{(3)} \\ A_t^{(4)} \end{bmatrix} & \underline{C}_t &= \begin{bmatrix} C_t A_t^{(1)} \\ 2(r+r')A_t^{(2)} \\ C_t A_t^{(3)} \\ 2(r+r')A_t^{(4)} \end{bmatrix} & \underline{\delta}_t &= \begin{bmatrix} \delta_t^{(1)} \\ \delta_t^{(2)} \\ \delta_t^{(3)} \\ \delta_t^{(4)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Modèle d'une intersection saturée

Dans ce cas, les longueurs de queue en fin de rouge ne disparaissent pas pendant le vert ; on représente leur évolution par les diagrammes suivants :

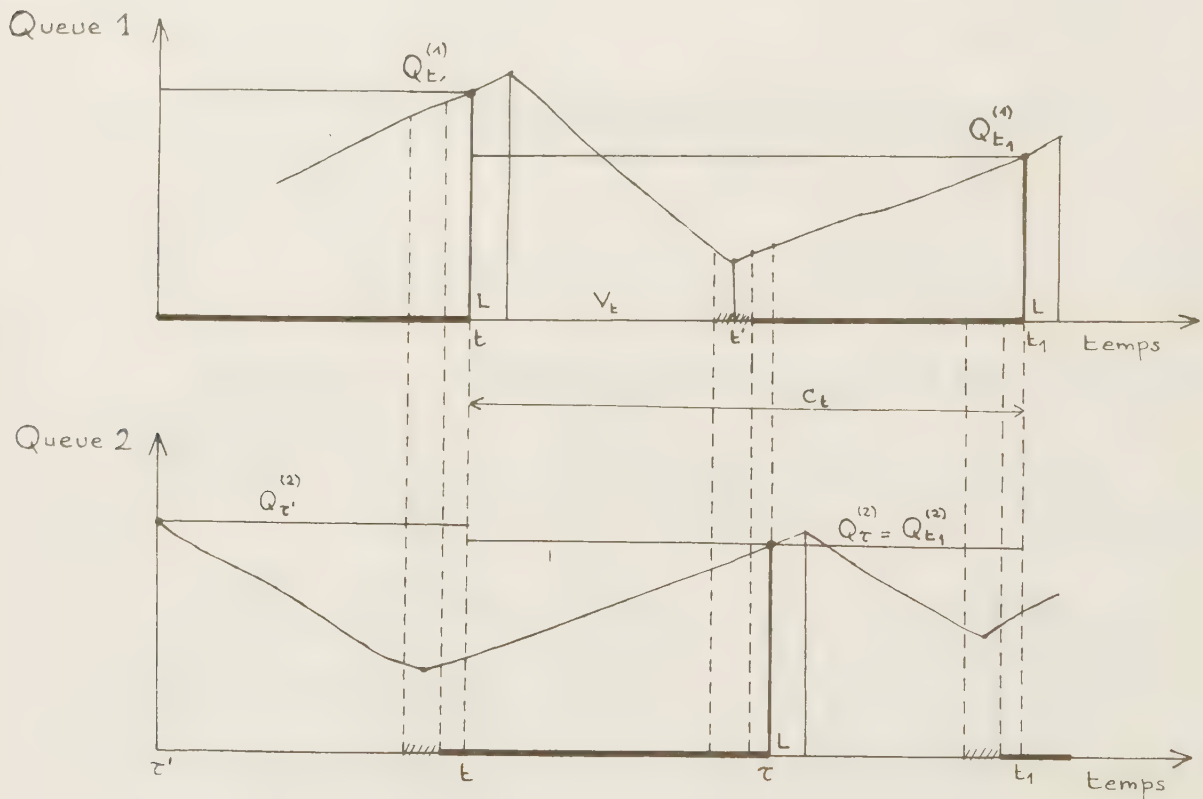


Fig. 1.18

Les mêmes difficultés que dans le paragraphe précédent réapparaissent, les instants de fin de rouge t, t_1 sur la voie 1 étant approximativement des instants de fin de vert sur la voie 2. On fera, pour alléger les notations, l'hypothèse suivante :

Entre t et t_1 , les queues restent constantes et égales à :

$$Q_{t_1}^{(1)} \text{ sur la voie 1}$$

$$Q_{t_1}^{(2)} \text{ sur la voie 2}$$

Les équations de fonctionnement sont alors :

$$Q_{t_1}^{(1)} = Q_t^{(1)} + C_t A_t^{(1)} - S_t^{(1)} (V_t - L) + \delta_t^{(1)} \text{ pour la voie 1}$$

$$Q_{t_1}^{(2)} = Q_t^{(2)} = Q_t^{(2)} + C_t A_t^{(2)} - S_t^{(2)} (C_t - V_t - 2(r+r') - L) + \delta_t^{(2)} + \varepsilon_t$$

pour la voie 2

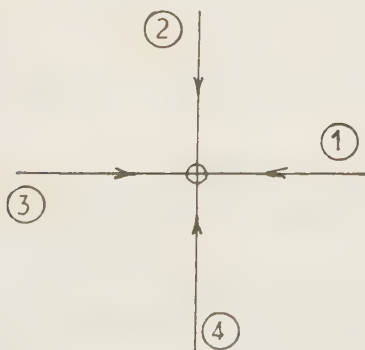
avec : $A_t^{(1)}, A_t^{(2)}$ les débits moyens d'arrivée sur $|t, t_1|$ des voies 1, 2

$S_t^{(1)}, S_t^{(2)}$ les débits de saturation sur $|t, t_1|$ des voies 1, 2

$\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}$ les erreurs commises en supposant les débits égaux à leur valeur moyenne.

ε_t : erreur de modèle due au fait que l'équation 2 est une équation liant les minima des longueurs de queue ; on la supposera gaussienne et de valeur moyenne nulle.

Les équations précédentes s'étendent facilement à un carrefour à quatre branches :



$$Q_{t_1}^{(1)} = Q_t^{(1)} + C_t A_t^{(1)} - S_t^{(1)} (V_t - L) + \delta_t^{(1)}$$

$$Q_{t_1}^{(2)} = Q_t^{(2)} + C_t A_t^{(2)} - S_t^{(2)} (C_t - V_t - 2(r+r') - L) + \delta_t^{(2)}$$

$$Q_{t_1}^{(3)} = Q_t^{(3)} + C_t A_t^{(3)} - S_t^{(3)} (V_t - L) + \delta_t^{(3)}$$

$$Q_{t_1}^{(4)} = Q_t^{(4)} + C_t A_t^{(4)} - S_t^{(4)} (C_t - V_t - 2(r+r') - L) + \delta_t^{(4)}$$

Fig. 1.19

Soit sous forme vectorielle : $\underline{Q}_{t_1} = \underline{Q}_t + \underline{B}_t' V_t + \underline{C}_t' + \underline{\delta}_t'$

$$\text{avec : } \underline{Q}_t = \begin{bmatrix} Q_t^{(1)} \\ Q_t^{(2)} \\ Q_t^{(3)} \\ Q_t^{(4)} \end{bmatrix} \quad \underline{B}'_t = \begin{bmatrix} -s_t^{(1)} \\ s_t^{(2)} \\ -s_t^{(3)} \\ s_t^{(4)} \end{bmatrix} \quad \underline{e}'_t = \begin{bmatrix} C_t A_t^{(1)} + s_t^{(1)} L \\ C_t A_t^{(2)} + s_t^{(2)} C_t + s_t^{(2)} (L+2r+2r') \\ C_t A_t^{(3)} + s_t^{(3)} L \\ C_t A_t^{(4)} + s_t^{(4)} C_t + s_t^{(4)} (L+2r+2r') \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \underline{\delta}'_t = \begin{bmatrix} \delta_t^{(1)} \\ \delta_t^{(2)} \\ \delta_t^{(3)} \\ \delta_t^{(4)} \end{bmatrix}$$

Conclusion :

Les modèles de commande d'une voie de circulation obtenus dans ce chapitre sous les hypothèses suivantes :

- Vision macroscopique de la circulation
- Débits d'arrivée constants sur un cycle et égaux à la valeur moyenne des débits réels,

sont constitués par les équations récurrentes ci-dessous :

$$\underline{Q}_{t_1} = \underline{B}_t V_t + \underline{C}_t + \underline{\delta}_t \quad \text{si la voie n'est pas saturée}$$

$$\underline{Q}_{t_1} = \underline{Q}_t + \underline{B}'_t V_t + \underline{C}'_t + \underline{\delta}'_t \quad \text{si la voie est saturée}$$

où :

- le vecteur d'état $\underline{Q}_t$ contient l'ensemble des longueurs de queue en fin de rouge (mesurables aux instants t_1, τ)
- le vecteur de commande contient la durée du vert et, éventuellement, la durée de cycle
- les perturbations apparaissent dans le vecteur $\underline{C}_t$ par l'intermédiaire des débits moyens d'arrivée.

Les chapitres suivants sont consacrés à l'utilisation de ces modèles en vue d'obtenir une politique de commande (vert, cycle) optimisant un critère de performance que nous allons définir. On envisagera successivement la commande de carrefours fonctionnant à cycle fixe puis celle de carrefours à cycle variable.

Chapitre 3

REGULATION OPTIMALE DE CARREFOURS A CYCLE FIXE

Ce chapitre décrit la régulation de carrefours isolés fonctionnant à cycle fixe, c'est-à-dire pour lesquels la seule grandeur de commande est la durée du vert. Après avoir défini le critère de cette régulation, les méthodes d'optimisation nous fourniront une politique de commande en boucle fermée sur les états et sur les perturbations dans les deux cas de trafic saturé et non saturé. Nous terminerons par la mise en place d'algorithmes généraux de commande d'une intersection, illustrée par des résultats obtenus en simulation.

3.1 - CRITERE DE REGULATION

Actuellement, les divers critères de régulation auxquels on peut s'intéresser sont les suivants :

- Fluidité de la circulation évaluée subjectivement en ville d'après l'absence de saturation et le petit nombre d'arrêts,
- Retards évalués sur l'ensemble des véhicules en circulation ou en valeur moyenne par véhicule,
- Débits ou nombre de véhicules traités par le carrefour ou le réseau,
- Sécurité des installations, etc...

Ces divers critères ne sont pas équivalents entre eux tant du point de vue résultats escomptés que du point de vue facilité d'utilisation.

Le retard total des véhicules sur un cycle étant directement lié aux longueurs de queue présentes sur ce cycle, la minimisation du critère J :

$$J = \sum_{i=t}^{t+n} \underline{Q}_i^T \underline{Q}_i$$

où : $\underline{Q}_i$ est le vecteur d'état défini au chapitre 2

n est la période d'optimisation,

conduira à la minimisation du retard total des véhicules évalué sur la période n . En outre, le vecteur d'état $\underline{Q}_i$ intervenant au carré dans le critère, on

admettra difficilement, lors de la régulation, la présence de très grandes files d'attente.

De plus, du point de vue mise en oeuvre de la commande optimale, la structure quadratique du critère et la structure linéaire des équations d'état nous fourniront une commande en boucle fermée sur les états (longueurs de queues) et sur les perturbations (débits d'arrivée).

Le problème de la régulation d'un carrefour isolé se pose alors en ces termes :

"Connaissant, à un instant donné t , les longueurs de queues $\underline{Q}_t$ en fin de rouge et les débits probables d'arrivée, déterminer la commande (durée de vert) qui minimise le critère :

$$J = \sum_{i=t}^{t+n} \underline{Q}_i^T \underline{Q}_i$$

où : $\underline{Q}_i$ est le vecteur d'état

n est la période d'optimisation

compte tenu des équations d'état :

$$\underline{Q}_{t_1} = \underline{B}_t V_t + \underline{C}_t + \underline{\delta}_t \quad (\text{régime non saturé})$$

$$\underline{Q}_{t_1} = \underline{Q}_t + \underline{B}'_t V_t + \underline{C}'_t + \underline{\delta}'_t \quad (\text{régime saturé})$$

et des contraintes de type bornes sur la commande :

$$V_{\min} \leq V_t \leq V_{\max} \quad "$$

Quelques remarques s'imposent :

1) La minimisation du critère suppose un choix préalable des équations d'état.

2) Compte tenu des hypothèses faites sur les séquences aléatoires $\underline{\delta}_t$ (moyenne nulle), on sait que, par analogie avec le principe de séparation, on les omettra dans la partie régulation.

3) Le choix de la période d'optimisation sera déterminé par la possibilité de mesurer ou de prévoir les perturbations (débits d'arrivée). En général, à cause des fluctuations importantes existant en circulation, leur prévision n'excède pas quelques minutes.

4) La forme du critère et l'ordre des équations d'état nous permettent même de réduire cet horizon à un cycle. Considérons en effet l'exemple simple ci-après :

"Déterminer la commande u_i qui minimise le critère :

$$J = \sum_{i=t}^{t+T} x_i^2$$

compte tenu de l'équation d'état :

$$x_{i+1} = x_i + u_i + \gamma_i$$

La minimisation du critère J conduit à annuler ou à minimiser à chaque instant $i \in [t, t+T]$ le terme x_i et fournit donc une commande u_i fonction uniquement de x_i et de γ_i ce que l'on obtient aussi bien en minimisant le critère :

$$J = x_{i+1}^2$$

Nous verrons dans le chapitre 4 que le critère de régulation utilisé peut se généraliser dans le cas de la commande d'un carrefour à cycle variable.

3.2 - CALCUL D'UNE COMMANDE EN BOUCLE FERMÉE

Nous allons déterminer une commande en boucle fermée d'une intersection isolée fonctionnant à cycle fixe, en examinant successivement les deux conditions de trafic non saturé et saturé et le passage d'un régime à l'autre. Les calculs seront développés sur un carrefour à deux branches, l'extension à un carrefour plus complexe ne présentant pas de difficultés.

3.2.1 - Régulation d'un carrefour non saturé

Compte tenu des considérations de critère développées ci-dessus, le problème de la régulation est le suivant :

"Déterminer la commande V_t qui minimise le critère :

$$J = Q_t^T \cdot Q_t$$

compte tenu des équations d'état :

$$Q_{t+1} = B_t V_t + C_t$$

et des contraintes :

$$V_{\min} \leq V_t \leq V_{\max} \quad \text{et} \quad Q_t \geq 0 \quad \text{quel que soit } t$$

Le critère peut être explicité et devient :

$$J = \underline{Q}_t^T \cdot \underline{Q}_t = |\underline{B}_t V_t + \underline{C}_t|^2 = |\underline{B}_t V_t + \underline{C}_t|^2$$

$$= \underline{B}_t^T \underline{B}_t V_t^2 + |\underline{C}_t^T \underline{B}_t + \underline{B}_t^T \underline{C}_t| V_t + \underline{C}_t^T \underline{C}_t$$

La commande optimale V_t^* s'obtient en annulant la dérivée de J par rapport à V_t (sous réserve de vérifier la contrainte $V_{\min} \leq V_t \leq V_{\max}$) :

$$\frac{\partial J}{\partial V_t} = 2 \underline{B}_t^T \underline{B}_t V_t + |\underline{C}_t^T \underline{B}_t + \underline{B}_t^T \underline{C}_t| = 0$$

Soit :

$$V_t^* = - \frac{\underline{C}_t^T \underline{B}_t + \underline{B}_t^T \underline{C}_t}{2 \underline{B}_t^T \underline{B}_t}$$

Les grandeurs intervenant ici étant des vecteurs et le produit scalaire étant commutatif, on obtient la commande suivante en boucle fermée sur les perturbations :

$$V_t^* = - \frac{\underline{C}_t^T \cdot \underline{B}_t}{\underline{B}_t^T \cdot \underline{B}_t}$$

Cas particulier d'un carrefour deux voies

Dans le cas particulier d'un carrefour à deux branches, les vecteurs

$\underline{B}_t$ et $\underline{C}_t$ sont :

$$\underline{B}_t = \begin{bmatrix} -A_t^{(1)} \\ A_t^{(2)} \end{bmatrix} \quad \underline{C}_t = \begin{bmatrix} C_t A_t^{(1)} \\ 2(r+r') A_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

Pour simplifier les notations, on posera : $\alpha = A_t^{(1)}$, $\beta = A_t^{(2)}$ et $(r+r') = a$.

L'expression du vert optimal devient :

$$V_t^* = C_t \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} - 2a \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

La valeur du vert sur la voie 2 se calcule grâce à la relation :

$$V_t^* + V^2 + 2a = C_t \quad \text{d'où} \quad V^2 = C_t \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - 2a \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Contraintes : Si la valeur du vert dépasse les valeurs permises $V_{\min}$, $V_{\max}$, le minimum du critère est obtenu sur les contraintes.

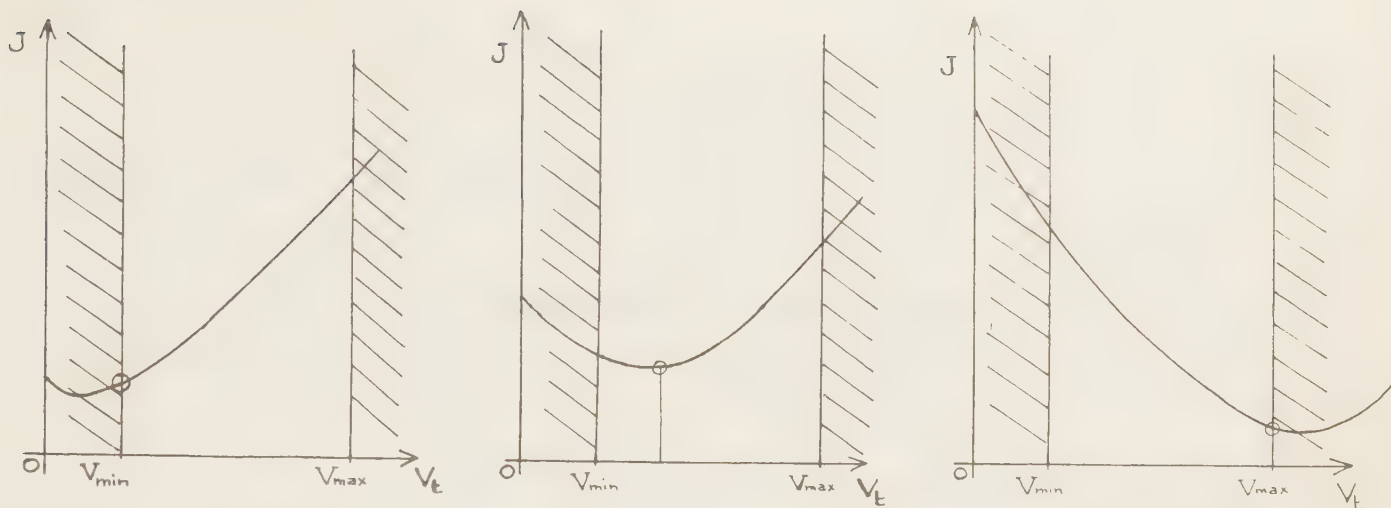


Fig. 1.21

3.2.2 - Régulation d'un carrefour saturé

De la même manière que précédemment, on calcule la valeur du vert V_t , d'abord sans tenir compte des contraintes, puis on déterminera sur un cas particulier le domaine de validité de cette commande.

Les équations d'évolution sont : $\underline{Q}_{t_1} = \underline{Q}_t + \underline{B}'_t V_t + \underline{C}'_t$. Le critère s'écrit alors :

$$J = \underline{Q}_{t_1}^T \cdot \underline{Q}_{t_1} = |\underline{Q}_t + \underline{B}'_t V_t + \underline{C}'_t|^T |\underline{Q}_t + \underline{B}'_t V_t + \underline{C}'_t|$$

En développant et en ordonnant par rapport à V_t , il vient :

$$J = |\underline{Q}_t + \underline{C}'_t|^T |\underline{Q}_t + \underline{C}'_t| + \{ \underline{B}_t^T (\underline{Q}_t + \underline{C}'_t) + (\underline{Q}_t + \underline{C}'_t)^T \underline{B}'_t \} V_t + \underline{B}_t^T \underline{B}'_t V_t^2$$

Hors contraintes, le minimum de J est obtenu en annulant la dérivée :

$$\frac{\partial J}{\partial V_t} = 0 \Rightarrow \underline{B}_t^T (\underline{Q}_t + \underline{C}'_t) + (\underline{Q}_t + \underline{C}'_t)^T \underline{B}'_t + 2 \underline{B}_t^T \underline{B}'_t V_t = 0$$

soit en simplifiant :

$$V_t^* = - \frac{\underline{B}_t^T |\underline{Q}_t + \underline{C}'_t|}{\underline{B}_t^T \cdot \underline{B}'_t}$$

Cas particulier d'un carrefour à deux voies

Dans le cas particulier d'un carrefour à deux branches, les vecteurs $\underline{B}'_t$, $\underline{C}'_t$ sont :

$$\underline{B}_t' = \begin{vmatrix} -s_t^{(1)} \\ s_t^{(2)} \end{vmatrix} \quad \underline{C}_t' = \begin{vmatrix} C_t A_t^{(1)} + S_t^{(1)} L \\ C_t A_t^{(2)} - S_t^{(2)} C_t + S_t^{(2)} (L+2(r+r')) \end{vmatrix}$$

On posera, pour alléger les notations :

$$s_t^{(1)} = s_1 ; s_t^{(2)} = s_2 ; A_t^{(1)} = \alpha ; A_t^{(2)} = \beta ; r+r' = a$$

L'expression du vert optimal V_t^* devient alors :

$$V_t^* = \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} C_t + \frac{s_1 Q_t^1 - s_2 Q_t^2}{s_1^2 + s_2^2} + C_t \frac{s_1 \alpha - s_2 \beta}{s_1^2 + s_2^2} + \frac{s_2 L - s_2^2 (L+2a)}{s_1^2 + s_2^2}$$

Si les deux voies de ce carrefour ont les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire le même débit de saturation s , on obtient :

$$V_t^* = \frac{C_t}{2} + \frac{Q_t^1 - Q_t^2}{2s} + \frac{C_t (\alpha - \beta)}{2s} - a$$

On remarque que, si l'état des deux voies est identique et si leurs débits d'arrivée sont égaux, la longueur du vert se réduit aux temps perdus près à la moitié du cycle.

Domaine de validité de cette commande

La valeur du vert est soumise aux contraintes :

$$V_{\min} \leq V_t \leq V_{\max}$$

Le critère étant quadratique, on peut affirmer que, si la valeur du vert V_t^* dépasse les limites permises, le minimum de J est obtenu sur les contraintes.

Equation d'évolution - Trajectoires optimales

Nous allons déterminer l'influence de cette commande optimale sur l'évolution du processus qui obéit à :

$$\underline{Q}_{t_1} = \underline{Q}_t + \underline{B}_t' V_t + \underline{C}_t'$$

Si la valeur du vert trouvée au § 3.2.2 est une commande admissible, (c'est-à-dire qui vérifie la contrainte $V_{\min} \leq V_t \leq V_{\max}$), l'état $\underline{Q}_{t_1}$ résultant de l'application de V_t^* est :

$$Q_{t_1} = \left[\Pi - \frac{\frac{B'_t}{B_t} \frac{B'_T}{B_T}}{\frac{B'_t}{B_t} \frac{B'_T}{B_T}} \right] (Q_t + C'_t)$$

où Π est la matrice unité .

Dans le cas particulier d'un carrefour à deux branches, le résultat intéressant est que les longueurs de queues obéissent à :

$$s_1 Q_t^1 = s_2 Q_t^2 \quad \text{quel que soit } t$$

Cette régulation optimale tend donc théoriquement à ramener et à maintenir les états du système dans un même rapport, c'est-à-dire égalise les degrés de saturation des différentes approches du carrefour. L'expression de ces états est :

$$Q_{t_1}^1 = \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} (s_2 Q_t^1 + s_1 Q_t^2) + C_t \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} (\alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2) - \frac{2 s_1 s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} (L+a)$$

$$Q_{t_1}^2 = \frac{s_1}{s_2} Q_{t_1}^1$$

$$\text{soit : } Q_{t_1}^1 = Q_t^1 + C_t \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} (\alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2) - \frac{2 s_1 s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} (L+a)$$

A l'aide de cette relation, il est possible de déterminer la condition de saturation ou de désaturation du système. En effet, il y a saturation si :

$$C_t (\alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2) - 2 s_1 s_2 (L+a) > 0$$

soit : $\frac{\alpha}{s_1} + \frac{\beta}{s_2} > 1 - \frac{2(L+a)}{C_t}$ qui est la condition classique de saturation.

3.2.3 - Transition entre les deux régimes

On a établi en 2.4 le critère de saturation qui sera utilisé.

Rappelons-le :

$$\text{si } \frac{Q(t) + S_t L}{S_t - A_t} \leq V_t \text{ la voie ne sera pas saturée}$$

$$\text{si } \frac{Q(t) + S_t L}{S_t - A_t} > V_t \text{ la voie sera saturée}$$

avec : S_t le débit de saturation

A_t le débit moyen d'arrivée

L les temps perdus dus à la montée en vitesse du peloton

Plaçons-nous dans le cas d'un carrefour à deux branches et appelons α, β, s_1, s_2 les débits d'arrivée et les débits de saturation de ces deux voies. Le problème posé est le suivant :

"Etant donné les longueurs de queue $Q_t^{(1)}$ et $Q_t^{(2)}$ à l'instant t , déterminer la commande optimale en boucle fermée V_t^* qui minimise le critère J , cette commande pouvant entraîner soit le régime saturé, soit le régime non saturé".

Nous allons étudier sur deux cas particuliers les moyens d'obtenir cette commande.

a) Régulation d'un carrefour deux voies ; voie 2 non saturée

Soit le carrefour suivant, où on suppose que la voie 2 n'est pas saturée, c'est-à-dire que les queues en fin de rouge sont faibles et seront faibles quelle que soit la commande. La voie de référence est la voie 1 sur laquelle on a mesuré $Q_t^{(1)}$. L'application d'une commande V_t peut entraîner deux cas :

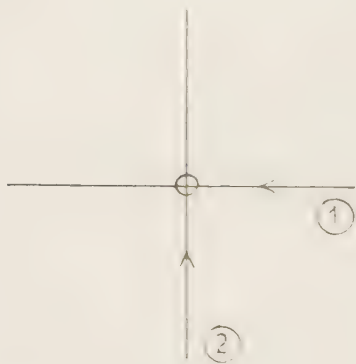


Fig. 1.22

- Il y a saturation de la voie 1. Les équations d'évolution sont alors :

$$Q_{t_1}^{(1)} = Q_t^{(1)} + C_t \alpha - s_1 (V_t - L)$$

$$Q_{t_1}^{(2)} = \beta (V_t + 2a)$$

avec la condition :

$$Q_t^{(1)} + s_1 L > (s_1 - \alpha) V_t$$

Le critère s'écrit alors :

$$J = (Q_{t_1}^{(1)})^2 + (Q_{t_1}^{(2)})^2 = |Q_t^{(1)} + C_t \alpha - s_1(V_t - L)|^2 + \beta^2 (V_t + r_a)^2$$

C'est une quadrique dans le plan $(Q_t^{(1)}, V_t)$ qui est minimum pour :

$$\frac{\partial J}{\partial V_t} = 0 \Rightarrow V_t^* = C_t \frac{\alpha s_1}{s_1^2 + \beta^2} + \frac{s_1}{s_1^2 + \beta^2} Q_t^{(1)} + \frac{s_1^2 L - 2\alpha\beta^2}{s_1^2 + \beta^2}$$

qui est une droite dans ce même plan.

- Il y a non saturation de la voie 1. Les équations d'évolution sont alors :

$$Q_{t_1}^{(1)} = \alpha(C_t - V_t)$$

$$Q_{t_1}^{(2)} = \beta(V_t + 2a)$$

avec la condition de non saturation $Q_t^{(1)} + s_1 L \leq (s_1 - \alpha) V_t$.

Le critère J ne dépendant pas de $Q_t^{(1)}$, sa représentation est une droite dans le plan $(Q_t^{(1)}, V_t)$. Son minimum est obtenu pour :

$$V_t = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} C_t - \frac{2\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\text{voir 3.2})$$

Les figures 1.23 et 1.24 représentent les courbes de niveau du critère dans le plan $(Q_t^{(1)}, V_t)$ sur lesquelles on a figuré les lieux des minima en traits forts. Elles mettent en évidence plusieurs zones de commande selon la valeur de $Q_t^{(1)}$. L'exemple de la figure 23 comporte 4 zones :

- Si $Q_t^{(1)}$ se trouve dans la zone 1, la voie 1 ne sera pas saturée.
- Si $Q_t^{(1)}$ est dans la zone 2, la voie 1 est à la limite de saturation.
- Si $Q_t^{(1)}$ est dans la zone 3, la voie 1 est saturée.
- Dans la zone 4, la voie 1 est saturée mais la commande V_t sort des limites permises.

On peut alors, à partir de la connaissance de $Q_t^{(1)}$ et de l'analyse précédente, calculer la commande minimisant notre critère.

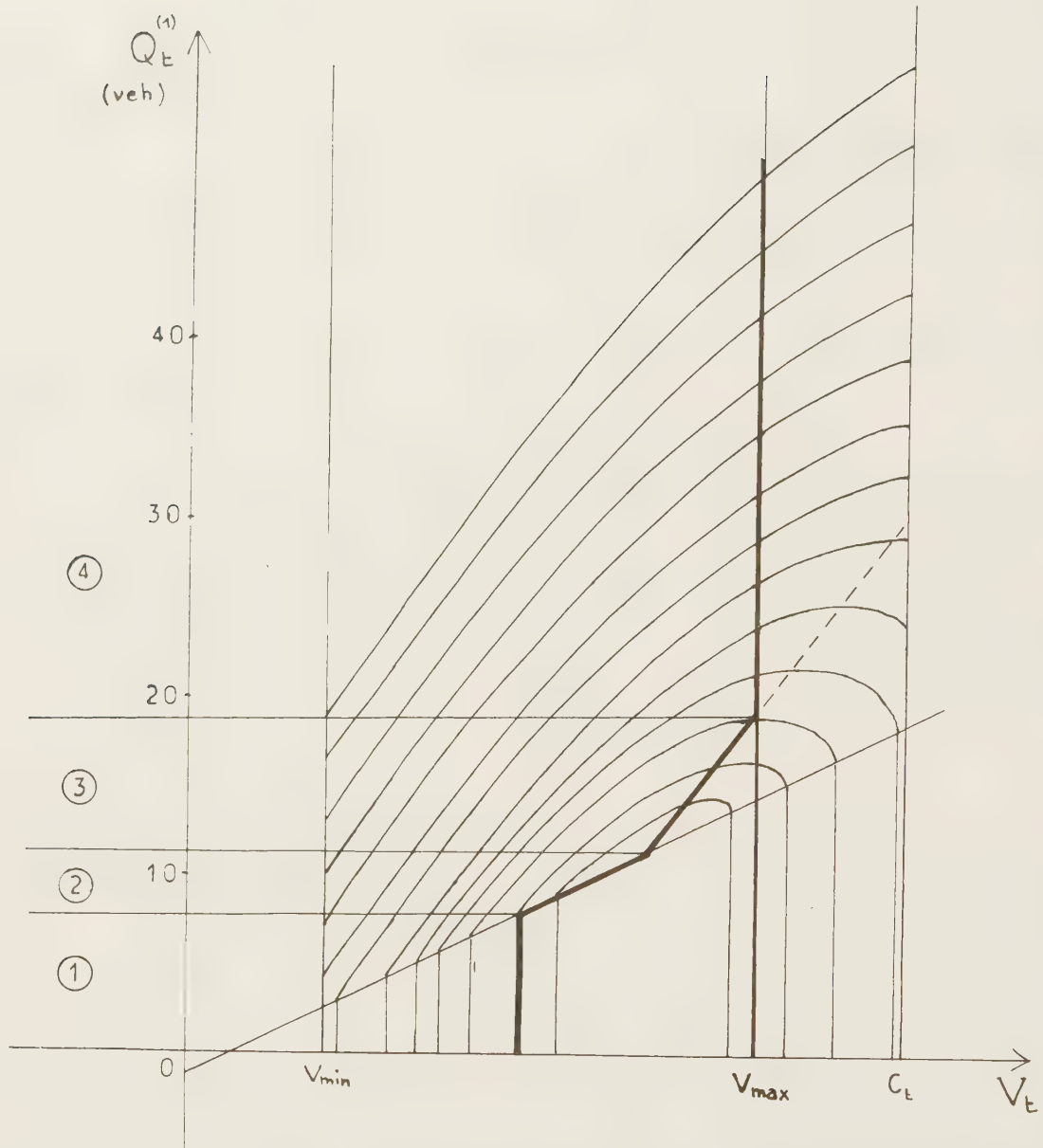


Fig. 1.23

- Courbes de niveau du critère :

$$C_t = 100s \quad L = 3s \quad s_1 = s_2 = 0.4 \text{ veh/s}$$

$$\alpha = \beta = 0.2 \text{ veh/s}$$

$$a = r + r' = 3s$$

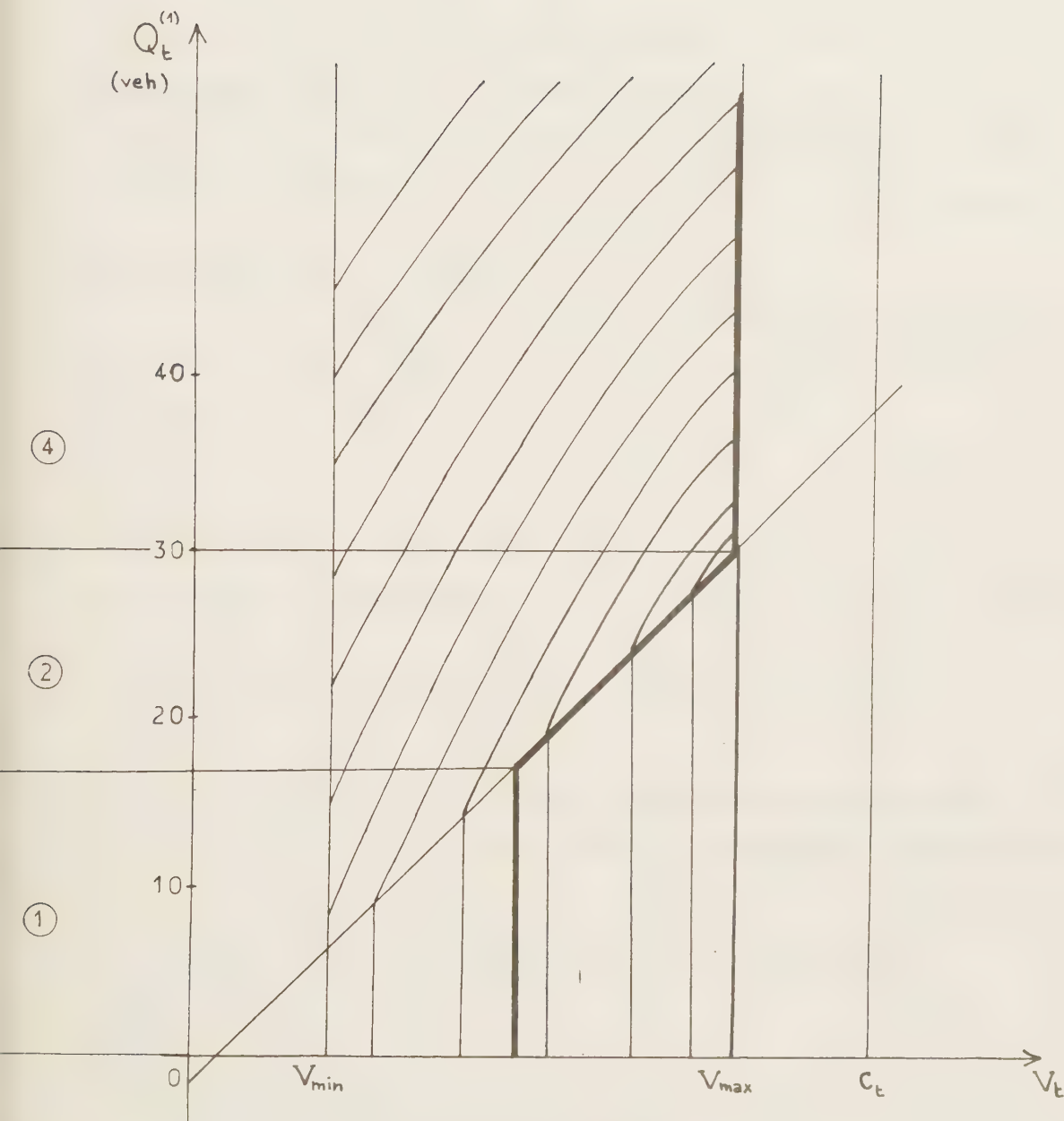


Fig. 1.24

- Courbes de niveau du critère -

$$C_t = 100 \text{ s} \quad L = 3 \text{ s} \quad S_1 = S_2 = 0.4 \text{ veh/s}$$

$$\alpha = \beta = 0.1 \text{ veh/s}$$

$$a = r + r' = 3 \text{ s}$$

b) Régulation d'un carrefour deux voies ; voie 2 saturée

On suppose cette fois la longueur de queue $Q_t^{(2)}$ suffisamment grande pour que la voie 2 reste saturée. La même étude que précédemment conduirait aux critères suivants :

- Si la voie 1 est saturée, il vient :

$$J = |Q_t^{(1)} + C_t \alpha - s_1(V_t - L)|^2 + |Q_t^{(2)} + \beta C_t - s_2(C_t - V_t - 2a - L)|^2$$

qui est une quadrique dans le plan $(Q_t^{(1)}, V_t)$. Le lieu des minima est une droite :

$$V_t = \frac{\frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} C_t + \frac{s_1 Q_t^{(1)} - s_2 Q_t^{(2)}}{\frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2} + \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2}} + C_t \frac{s_1 \alpha - s_2 \beta}{\frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2} + \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2}} + \frac{s_1^2 L - s_2^2 (L + 2a)}{\frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2} + \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2}}$$

- Si la voie 1 n'est pas saturée, il vient :

$$J = \alpha^2 (C_t - V_t)^2 + |Q_t^{(2)} + \beta C_t - s_2(C_t - V_t - 2a - L)|^2$$

qui est une droite dans le plan $(Q_t^{(1)}, V_t)$. Le lieu des minima est une droite :

$$V_t = C_t - \frac{\frac{s_2 \beta}{\alpha^2 + s_2^2} C_t - \frac{s_2}{s_2^2 + \alpha^2} Q_t^{(2)} - \frac{s_2^2 (2a + L)}{\alpha^2 + s_2^2}}$$

Les courbes de niveau du critère dans le plan $(Q_t^{(1)}, V_t)$ auront l'allure suivante selon la valeur de $Q_t^{(2)}$ (fig. 1.25).

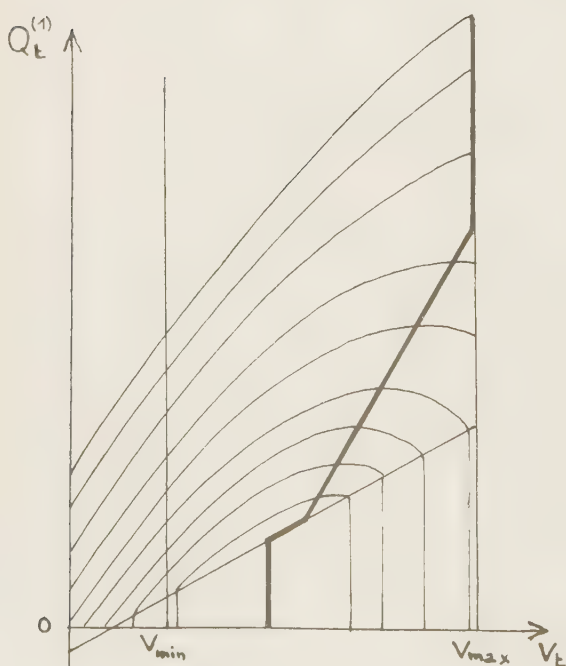
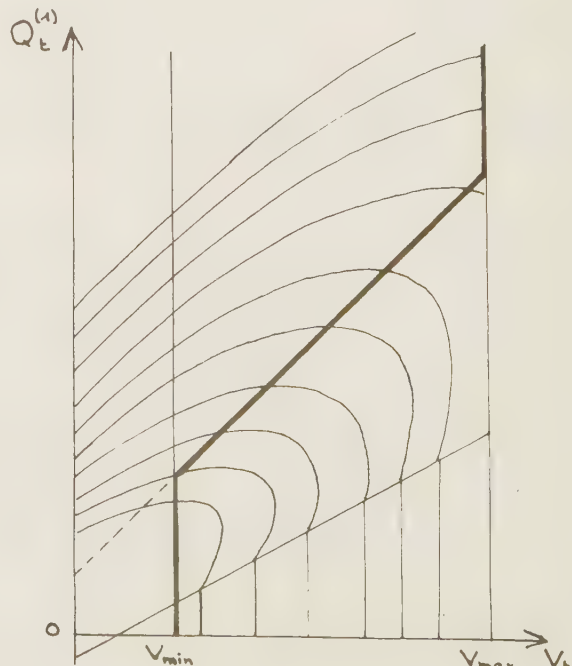


Fig. 1.25

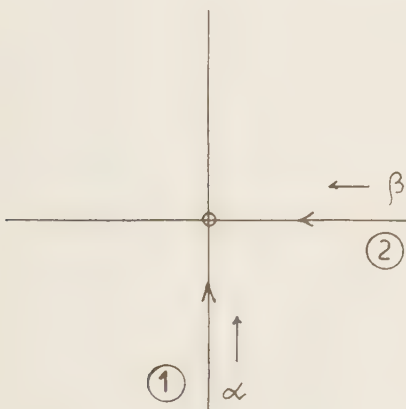


On met, de la même manière, en évidence un certain nombre de zones selon la valeur de $Q_t^{(1)}$ nous permettant de calculer la commande optimale.

On a maintenant une vue générale du problème de la régulation d'un carrefour à cycle fixe. Selon les valeurs des longueurs de queues $Q_t^{(1)}$, $Q_t^{(2)}$ et des débits probables d'arrivée, il est alors possible d'établir un organigramme général de calcul de la commande optimale en boucle fermée dans tous les cas. On présente en annexe I cet organigramme, ainsi que le programme FORTRAN de la régulation.

3.3 - RESULTATS EN SIMULATION

Les figures 1.26 et 1.27 concernent l'application en simulation de ce système de régulation à un carrefour à deux voies dont le fonctionnement est régi par les équations d'état définies au chapitre 2.



Chaque voie est caractérisée par son débit de saturation s_i et son débit d'arrivée α, β .

Les deux essais qui suivent concernent les réponses du système à un échelon de débit sur α , les autres paramètres étant maintenus constants.

On voit très nettement sur ces figures la transition du régime non saturé au régime saturé pour lequel les états conservent le même rapport. On a simulé en outre une

fausse mesure sur la longueur de queue Q^1 ce qui nous permet de constater que le système revient à son équilibre après environ 3 cycles.

Conclusion :

On a montré que le pilotage du trafic à une intersection fonctionnant à cycle fixe peut être obtenu grâce à un algorithme de commande optimale avec prédiction, basée sur un modèle dynamique différent selon que l'on se trouve ou non en régime saturé. La commande s'effectue en boucle fermée sur les longueurs de queues et sur les débits probables d'arrivée. On a constaté que cette commande agit de manière à ce que les longueurs de queues ne soient pas trop élevées et, dans certains cas, elle provoque délibérément la saturation d'une voie pour éviter un engorgement trop important des autres accès.

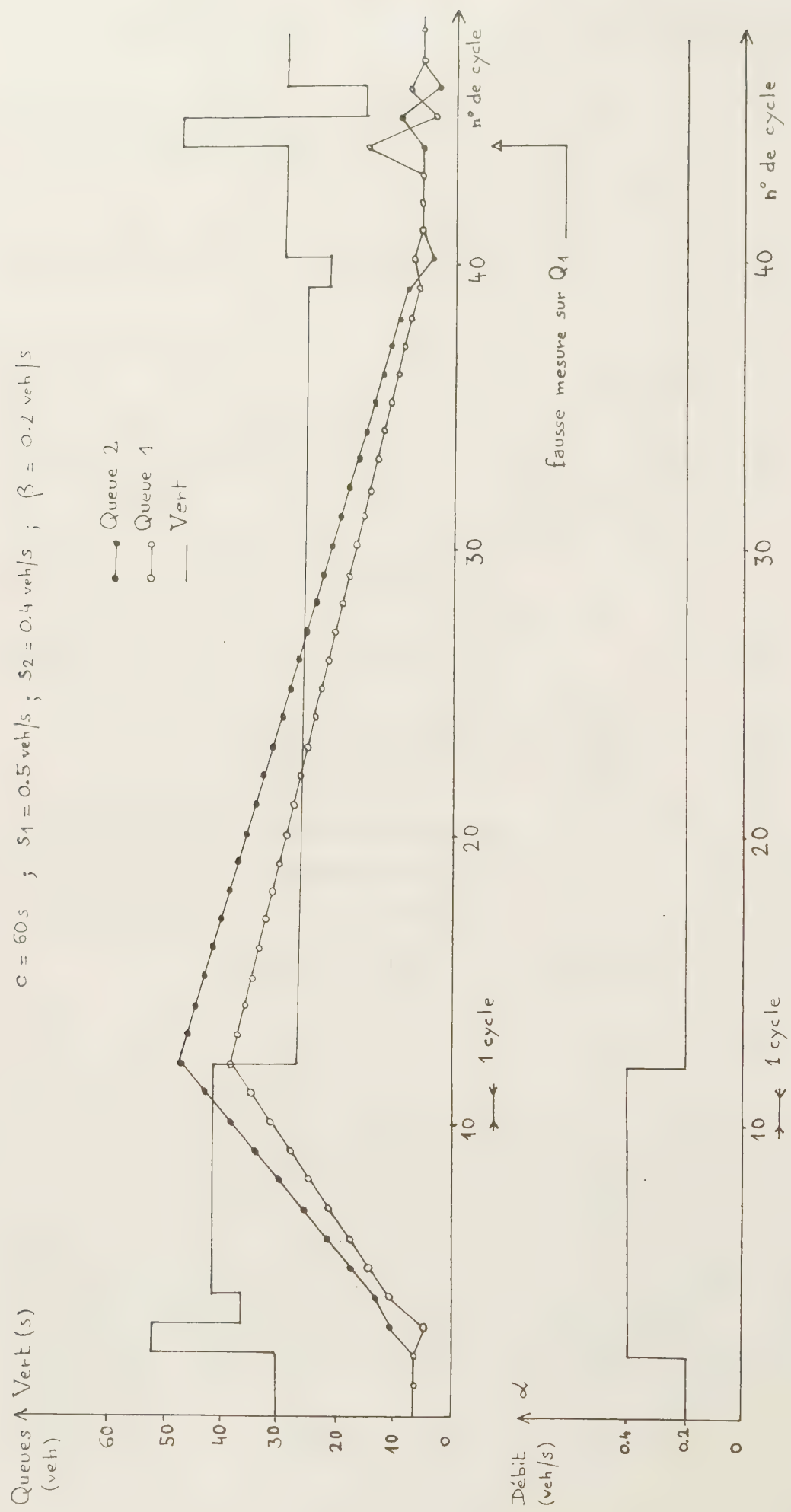


Fig. 1.26

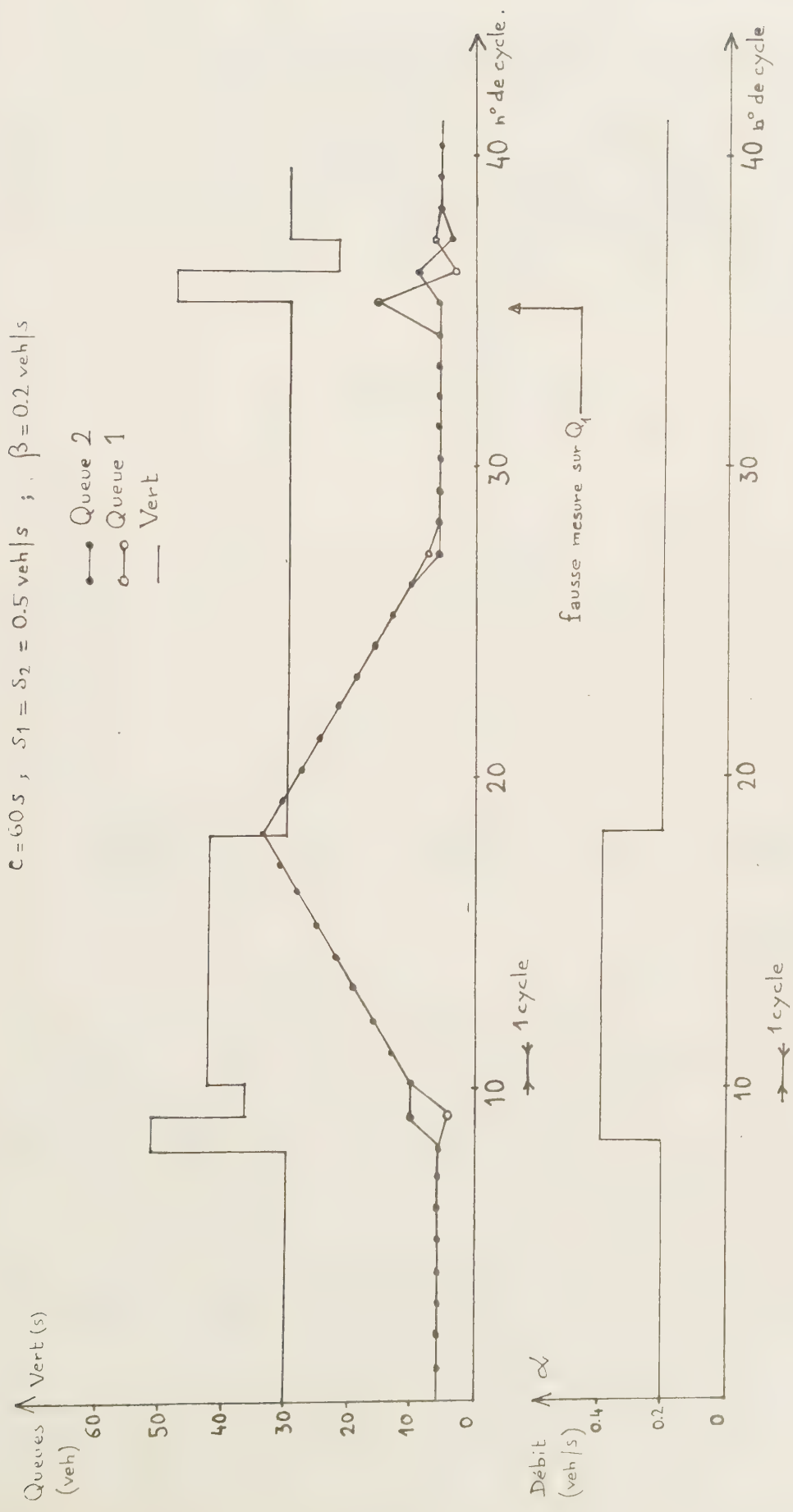


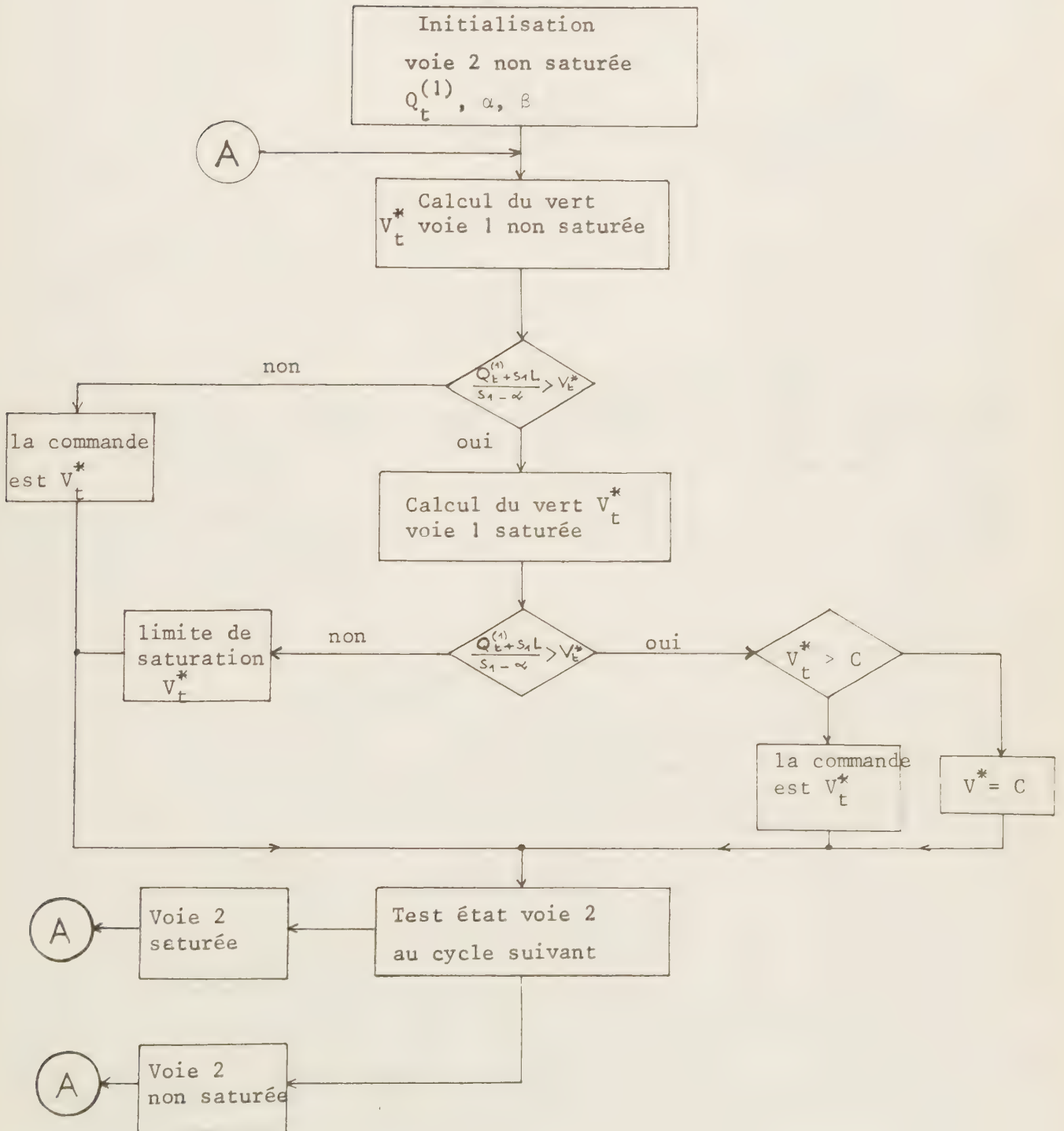
Fig. 1.27

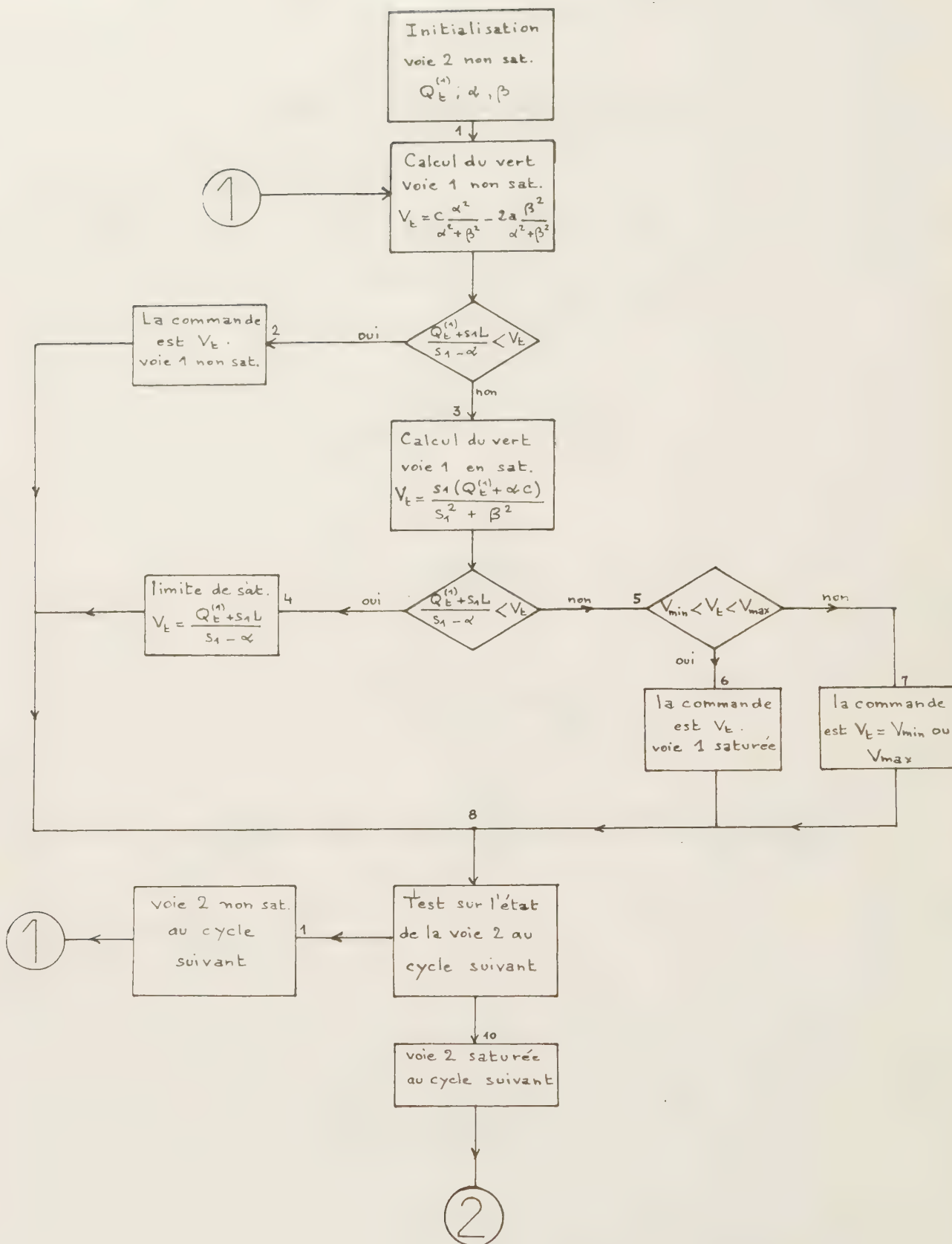
Le temps de calcul d'une commande est de l'ordre du dixième de seconde sur IBM 1130 ce qui permet une implantation en ligne de ce système (cf. deuxième partie).

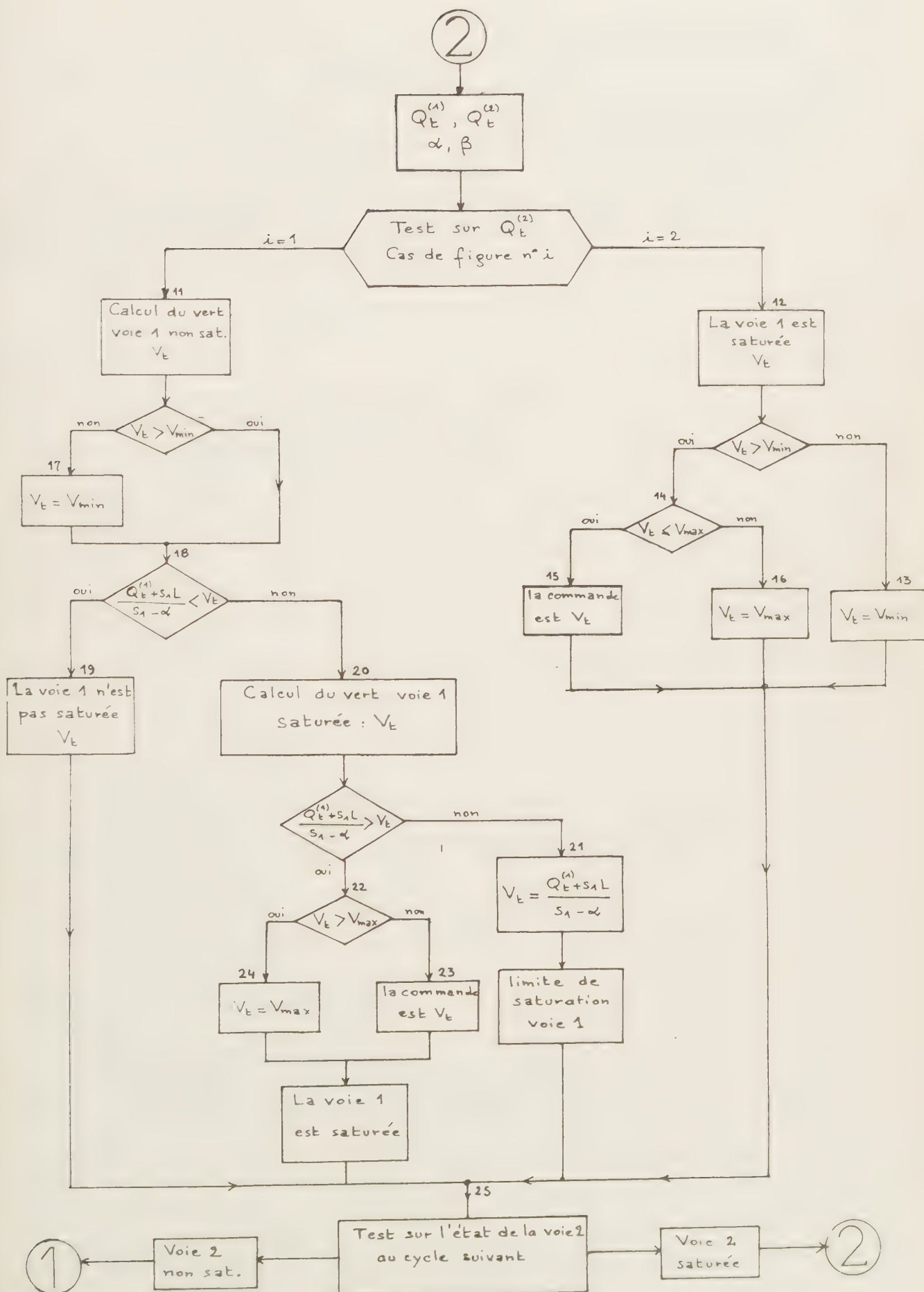
Ce type de commande à cycle fixe peut être utilisé lorsque l'intersection considérée est incluse dans un réseau coordonné (cycle imposé) ou lorsque son fonctionnement a lieu sous des contraintes de cycle (valeurs minimum et maximum imposées). Cependant, dans le cas général, la durée de cycle est aussi une grandeur de commande au même titre que la durée de vert ; c'est pourquoi le chapitre 4 traite d'un cas plus général de régulation d'un carrefour puisqu'on y détermine à la fois ces deux grandeurs fondamentales.

Annexe 1

ORGANIGRAMME SIMPLIFIE DE COMMANDE








```

11 V=C-S2*(C2+C*BETA)/(S2*S2+ALPHA*ALPHA)
12 IF(V)17,17,18
13 V=C
14 IF(Q1-(S1-ALPHA)*V)19,19,20
15 WRITE(3,101) V
101 FORMAT(/,10X,'VOIE 2 SATUREE',5X,'VE=',F8.3)
16 Q1=(C-ALPHA)*V
17 GO TO 25
18 Q1=(S1*S1-S2*Q2+C*(S1*ALPHA-S2*BETA)+C*S2*S2)/(S1*S1+S2*S2)
19 IF(Q1-(S1-ALPHA)*V)21,21,22
20 V=Q1/(S1-ALPHA)
21 WRITE(3,110) V
110 FORMAT(/,10X,'LIMITE DE SATURATION VOIE 1',5X,'VE=',F8.3)
22 Q1=ALPHA*(C-V)
23 GO TO 25
24 IF(V-C)23,23,24
25 V=C
26 WRITE(3,102) V
102 FORMAT(/,10X,'VOIES 1 ET 2 SATUREES',5X,'VE=',F8.3)
27 Q1=Q1+C*ALPHA-S1*V
28 I=I+1
29 WRITE(3,107) I,Q1
30 IF(I-20)33,33,34
34 ALPHA=0.2
35 IF(I-80)33,33,29
36 IF(V-(2*C*(S2-BETA)-Q2)/(2*S2-BETA))1,1,27
37 Q2=Q2+C*(BETA-S2)+V*S2
38 WRITE(3,111) I,Q2
39 GO TO 28
40 STOP
END

```

FEATURES SUPPORTED

1005

CORE REQUIREMENTS FOR

COMMON 0 VARIABLES 30 PROGRAM 888

END OF COMPILATION

40 XES

Chapitre 4

DETERMINATION OPTIMALE DES DEUX COMMANDES VERT ET CYCLE D'UNE INTERSECTION ISOLEE

Parmi les méthodes classiques de régulation d'un carrefour isolé, celle de Webster [7] propose la valeur du cycle optimale vis-à-vis du retard des véhicules en période de non-saturation.

Ses expériences ont montré en outre que la sensibilité de ce critère vis-à-vis de la durée de cycle était peu importante. En effet, une variation de 50 % à partir du cycle optimum conduit seulement à une variation de 10 % sur le critère. Donc, dans le cas particulier d'un carrefour non saturé, c'est surtout la répartition en phases qui est primordiale.

Cependant, lorsque le carrefour entre dans une phase de congestion, la durée de cycle devient une commande importante car, d'elle, dépend le débit de sortie du carrefour et donc la longueur des files d'attente.

Après avoir défini le critère employé pour la régulation, nous traiterons successivement le problème d'optimisation de ce critère dans les cas de trafic non saturé et saturé. L'étude aboutira, comme dans le chapitre précédent à un organigramme général de commande illustré d'essais en simulation.

4.1 - CRITERE DE REGULATION

Le but de la régulation d'un carrefour isolé est de déterminer les commandes vert et cycle qui minimisent le critère J suivant :

$$J = \sum_{i=t}^{t+n} | \underline{Q}_i^T \underline{Q}_i + \lambda^2 C_i^2 |$$

où : $\underline{Q}_i$ est le vecteur d'état défini au chapitre 2

C_i la durée du cycle

λ^2 un coefficient de pondération

n la période d'optimisation.

Comme précédemment, la structure de ce critère appelle plusieurs remarques :

1) Puisqu'il est quadratique et que les équations d'état sont linéaires, le vecteur de commande obtenu par optimisation sera en boucle fermée sur les états

2) La minimisation du seul premier terme $\underline{Q}_i^T \underline{Q}_i$ conduit à des durées de cycle trop importantes. En effet, à cause des temps perdus par les conducteurs en un cycle (temps de réaction au vert, rouge barrage, etc...), les longueurs de queue sont d'autant plus faibles que le débit de sortie est plus grand, donc que le cycle est plus long.

Pour des raisons psychologiques, il est bon de limiter cette durée de cycle afin que les véhicules en attente ne restent pas trop longtemps immobiles avant de passer, d'où l'introduction de C_i^2 dans le critère.

3) Dans le cas particulier d'une intersection à cycle fixe, le second terme peut être omis et on retrouve bien le critère défini au chapitre III.

4) La période d'optimisation est de l'ordre de quelques minutes pour les mêmes raisons que celles exposées au chapitre III.

Le problème de la régulation est alors le suivant en posant $\underline{u}_t = \begin{bmatrix} V \\ C_t \end{bmatrix}$. "Déterminer le vecteur de commande $\underline{u}_t$ qui minimise le critère :

$$J = \sum_{i=t}^{t+n} \left| \underline{Q}_i^T \underline{Q}_i + \lambda^2 C_i^2 \right|$$

compte tenu des équations d'état déduites de celles exposées en 2.5 :

$$\underline{Q}_{t_1} = B^+ \underline{u}_t + \underline{Q}_t^+ \quad \text{en régime non saturé}$$

$$\underline{Q}_{t_1} = \underline{Q}_t + B^* \underline{u}_t + \underline{Q}_t^* \quad \text{en régime saturé}$$

et des contraintes :

$$V_{\min} < V_t < C_t - V_{\min} \quad \text{et} \quad C_{\min} < C_t < C_{\max}$$

où $V_{\min}$, $C_{\min}$, $C_{\max}$ sont des constantes et V_t la durée du vert.

Nous étudierons successivement les régimes non saturé et saturé sur le cas particulier d'un carrefour à deux voies.

4.2 - REGULATION D'UNE INTERSECTION NON SATURÉE

On supposera que les débits d'arrivée sont tels que l'intersection ne se sature pas et qu'ils sont constants et égaux à leur valeur moyenne probable sur la période d'optimisation $[t, t+n]$.

Les équations d'évolution sont pour deux voies :

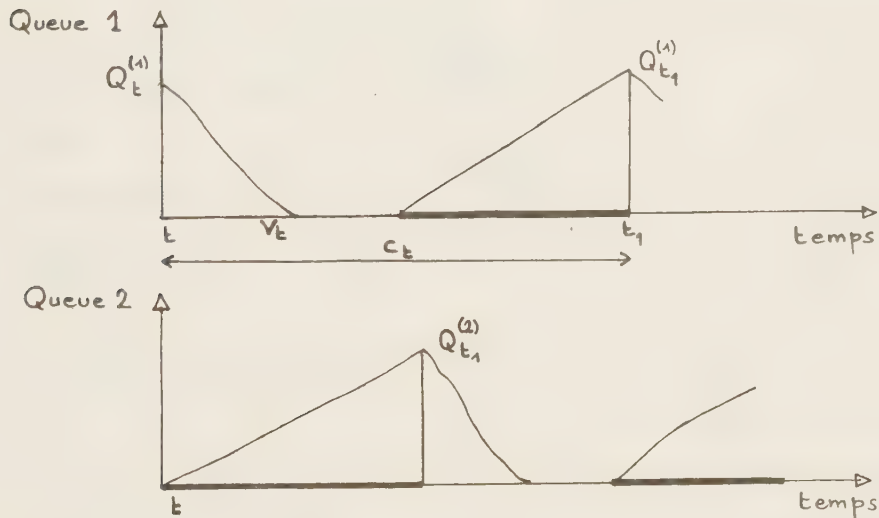
$$\begin{aligned} Q_{t_1}^{(1)} &= \alpha(C_t - V_t) \\ Q_{t_1}^{(2)} &= \beta(V_t + 2a) \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ les débits d'arrivée des voies 1 et 2,} \\ a \text{ et } L \text{ définis en 2.5,} \\ s_1, s_2 \text{ les débits de saturation des voies} \\ 1 \text{ et 2.} \end{array} \right.$$

Les contraintes de non-saturation sont, d'après la figure 1.30 :

$$Q_t^{(1)} + s_1 L < (s_1 - \alpha) V_t \text{ pour la voie 1}$$

$$Q_{t_1}^{(2)} + \beta L < (s_2 - \beta) (C_t - V_t - L - 2a) \text{ pour la voie 2}$$

Le critère à optimiser est : $J = \sum_t^{t+n} |Q_i^T Q_i + \lambda^2 C_i^2|$



- Figure 1.30 -

Si on se fixe la période d'optimisation T telle que :

$$\sum_{i=t}^{t+(n-1)} C_i = T$$

le critère s'écrit :

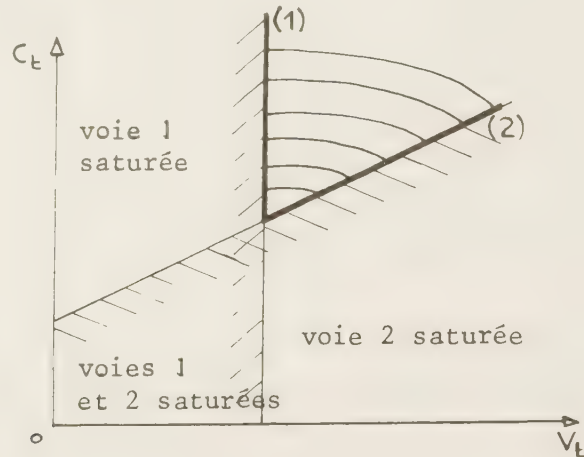
$$J = \sum_t^{t+(n-1)} (Q_i^T Q_i + \lambda^2 C_i^2) + Q_n^T Q_n$$

Les contraintes de non-saturation deviennent, en remplaçant $Q_{t_1}^{(2)}$ par sa valeur :

$$(1) \quad Q_t^{(1)} + s_1 L < (s_1 - \alpha) V_t \text{ pour la voie 1}$$

$$(2) (s_2 - \beta) C_t > s_2 V_t + (2a + L) s_2 \text{ pour la voie 2.}$$

Représentons dans le plan (C_t, V_t) les courbes de niveau du critère $J' = \underline{Q}_1^T \underline{Q}_1$ à un instant i quelconque entre $|t, t + T|$, ainsi que les contraintes (1) et (2).



- Figure 1.31 -

Le critère $J' = \alpha^2 (C_t - V_t)^2 + \beta^2 (V_t + 2a)^2$ est une quadrique de directions propres :

$$C_t = \frac{\beta^2 - \sqrt{\Delta}}{2\alpha^2} V_t \quad \text{et} \quad C_t = \frac{\beta^2 + \sqrt{\Delta}}{2\alpha^2} V_t \quad \text{avec} \quad \Delta = 4\alpha^4 + \beta^4$$

et de centre $C_t = +2a, V_t = -2a$

Donc, hors saturation, le critère partiel $\underline{Q}_t^T \underline{Q}_t$ a la forme indiquée ci-dessus quel que soit t , ce qui signifie que son minimum est obtenu pour le cycle minimum compatible avec les contraintes. Les deux termes du critère varient donc dans le même sens ; on en déduit que le second terme $\lambda^2 C_i^2$ peut être omis.

D'autre part, la forme du critère et l'ordre des équations (cf chapitre 3) montrent que, à chaque instant, les commandes ne dépendent que des perturbations sur le cycle suivant, ce qui nous permet de réduire l'horizon à un cycle et ne considérer que le critère :

$$J_1 = \underline{Q}_{t_1}^T \cdot \underline{Q}_{t_1}$$

Les commandes compatibles avec les contraintes qui minimisent J_1 à chaque instant sont obtenues à l'intersection des deux droites (1) et (2). On obtient donc des valeurs de vert et de cycle fonction des

états et des débits d'arrivée. Leurs expressions sont :

$$V_t = \frac{Q_t^{(1)} + s_1 L}{s_1 - \alpha}$$

$$C_t = \frac{s_2}{s_2 - \beta} V_t + \frac{2a + L}{s_2 - \beta} s_2$$

si la voie 2 était effectivement non saturée à l'instant t et :

$$V_t = \frac{Q_t^{(1)} + s_1 L}{s_1 - \alpha}$$

$$C_t = \frac{s_2}{s_2 - \beta} V_t + \frac{s_2(L+2a)}{s_2 - \beta} + \frac{1}{s_2 - \beta} (Q_t^{(2)} + K)$$

si la voie 2 se trouvait saturée par suite d'une perturbation, la constante K dépendant des commandes précédentes.

Lorsque les débits d'arrivée sont constants et lorsqu'il n'y a pas de perturbation sur les états, le système atteint son régime permanent. Dans ce cas, les contraintes deviennent :

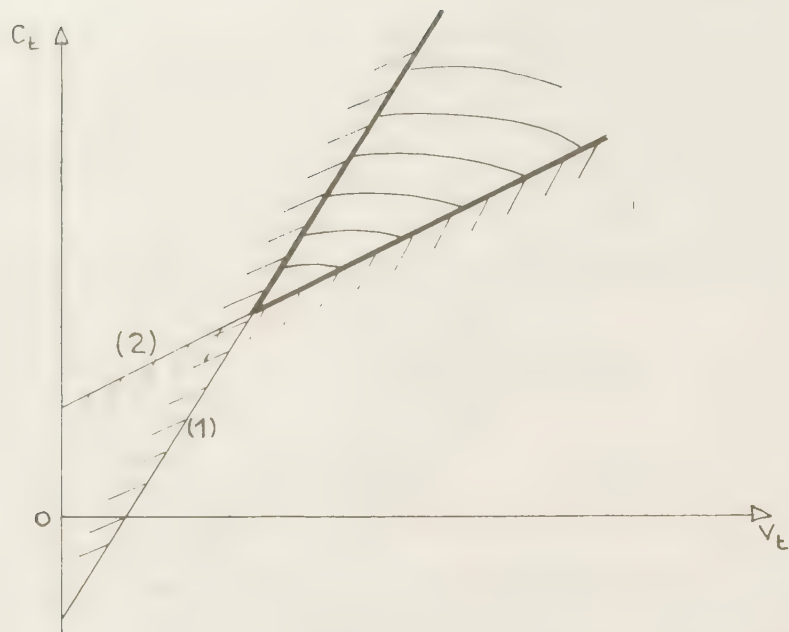
$$Q_{t_1}^{(1)} = \alpha(C_t - V_t) \Rightarrow (s_1 - \alpha)V_t = \alpha(C_t - V_t) + s_1 L$$

soit :

$$(1) \quad C_t \leq \frac{s_1}{\alpha} (V_t - L)$$

$$(2) \quad C_t \geq \frac{s_2}{s_2 - \beta} V_t + \frac{2a + L}{s_2 - \beta} s_2$$

Ces contraintes, ainsi que le critère, peuvent être représentées dans le plan $[C_t, V_t]$:



- Figure 1.32 -

Le minimum du critère s'obtient à l'intersection des deux droites ; on obtient alors :

$$C_t^* = \frac{2(L + a)}{1 - \frac{\beta}{s_2} - \frac{\alpha}{s_1}} \quad \text{et} \quad V_t^* = \frac{\alpha}{s_1} C_t^* + L$$

Dans le cas du régime permanent, on retrouve ici les formules classiques dues à Webster ou Wadrop, ainsi que celles données par l'algorithme de Dunne et Potts. Contrairement à ces méthodes, le calcul proposé tient compte des phénomènes transitoires.

Remarque : L'intersection de ces deux droites existe si leurs pentes sont telles que :

$$\frac{s_1}{\alpha} > \frac{s_2}{s_2 - \beta} \Rightarrow s_1 s_2 - s_1 \beta - s_2 \alpha > 0$$

qui est une condition classique de non saturation.

4.3 - REGULATION D'UNE INTERSECTION SATURÉE

Avec les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, les équations d'évolution pour un carrefour saturé à deux branches sont :

$$\begin{cases} Q_{t_1}^{(1)} = Q_t^{(1)} + \alpha C_t - s_1 (V_t - L) \\ Q_{t_1}^{(2)} = Q_t^{(2)} + \beta C_t - s_2 (C_t - V_t - L - 2a) \end{cases}$$

On désire déterminer les couples de commande (C_t, V_t) qui minimisent le critère:

$$J = \sum_t^{t+(n-1)} |Q_{i-1}^T Q_i + \lambda^2 C_i^2| + Q_{-n}^T Q_n$$

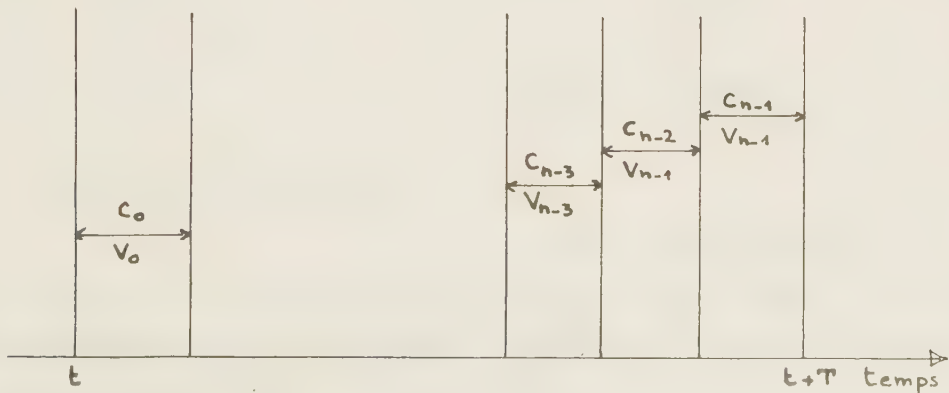
avec $\sum_t^{t+n-1} C_i = T$ période d'optimisation fixée,

n désignant le nombre de cycles inclus dans la période $|t, t+T|$

Après avoir démontré que la structure du vert optimal V_t reste invariante dans la période d'optimisation $|t, t+T|$, nous verrons que la résolution du problème ci-dessus conduit à des résultats inutilisables pratiquement, et nous proposerons une méthode approchée suffisamment simple pour être appliquée en temps réel.

4.3.1 - Calcul du vert optimal V_t

Supposons la période d'optimisation T décomposée en n cycles $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$.



Nous allons montrer grâce à la programmation dynamique, que la structure du vert optimal V_t reste inchangée quel que soit le numéro de cycle. Le critère s'écrit :

$$J = \sum_{i=t}^{t+(n-1)} \left[\underline{Q}_{i-1}^T \underline{Q}_i + \lambda^2 C_i^2 \right] + \underline{Q}_n^T \underline{Q}_n$$

Soit $f_{n-i}(Q)$ le minimum du critère pour un système qui part de l'état Q à l'instant $t + C_0 + C_1 + \dots + C_{n-i-1}$

- Le coût final est $f_n(Q) = \underline{Q}^T \underline{Q}$

- S'il ne reste qu'un cycle avant d'arriver à $t + T$, sa valeur est connue

à cause de la contrainte $\sum_{i=1}^{n-1} C_i = T$. La relation fondamentale de la programmation dynamique s'écrit alors pour un carrefour à deux voies :

$$f_{n-i}(Q) = \min_{\substack{V_{n-1} \\ C_{n-1}^{(2)}}} \left[\underline{Q}^T \underline{Q} + \lambda^2 C_{n-1}^2 + (Q^{(1)})^2 + \alpha C_{n-1} - s_1 (V_{n-1} - L)^2 + (Q^{(2)})^2 + \beta C_{n-1} - s_2 (C_{n-1} - V_{n-1} - L - 2a)^2 \right]$$

avec $C_{n-1} = T - \sum_{i=0}^{n-2} C_i$ connu.

La minimisation conduit au couple de commandes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{n-1} = \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} C_{n-1} + \frac{s_1 Q_1 - s_2 Q_2}{s_1^2 + s_2^2} + C_{n-1} \frac{s_1 \alpha - s_2 \beta}{s_1^2 + s_2^2} + \\ \frac{s_1^2 L - s_2^2 (L+2a)}{s_1^2 + s_2^2} \\ C_{n-1} = T - \sum_{i=0}^{n-2} C_i \end{array} \right.$$

Le critère devient alors :

$$f_{n-1}(Q) = (Q^1)^2 + (Q^2)^2 + \lambda^2 C_{n-1}^2 + \frac{1}{s_1^2 + s_2^2} \left[s_2 Q^1 + s_1 Q^2 + C_{n-1} (\alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2) - 2 s_1 s_2 (L+a) \right]^2$$

- S'il reste deux cycles (C_{n-2}, C_{n-1}) avant d'arriver en $t + T$, la relation fondamentale de la programmation dynamique s'écrit :

$$f_{n-2}(Q) = \min_{\substack{V_{n-2} \\ C_{n-2}}} \left[\frac{Q^T Q}{2} + \lambda^2 C_{n-2}^2 + (Q^{1+\alpha} C_{n-2} - s_1 (V_{n-2} - L))^2 + (Q^2 + \beta C_{n-2} - s_2 (C_{n-2} - V_{n-2} - L - 2a))^2 + \lambda^2 C_{n-1}^2 + \frac{1}{s_1^2 + s_2^2} |s_2 (Q^{1+\alpha} C_{n-2} - s_1 (V_{n-2} - L) + s_1 (Q^2 + \beta C_{n-2} - s_2 (C_{n-2} - V_{n-2} - L - 2a)) + C_{n-1} (s_2 \alpha + s_1 \beta - s_1 s_2) - 2s_1 s_2 (L+a)|^2 \right]$$

Compte tenu de la relation $C_{n-1} = T - C_{n-2} - \sum_{i=0}^{n-3} C_i$; la minimisation de $f_{n-2}(Q)$ par rapport à V_{n-2} conduit à :

$$V_{n-2} = \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} C_{n-2} + \frac{s_1 Q_1 - s_2 Q_2}{s_1^2 + s_2^2} + C_{n-2} \frac{s_1 \alpha - s_2 \beta}{s_1^2 + s_2^2} + \frac{s_1^2 L - s_2^2 (L+2a)}{s_1^2 + s_2^2}$$

$$C_{n-2} \left(2\lambda^2 + \frac{(\alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2)^2}{s_1^2 + s_2^2} \right) = \lambda^2 \left(T - \sum_{i=0}^{n-3} C_i \right) - \frac{\alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2}{s_1^2 + s_2^2} (s_2 Q_1 + s_1 Q_2 - 2s_1 s_2 (L+a))$$

Nous remarquons donc que l'expression du vert optimal V_t est la même que précédemment .

On a montré de la même façon que cette structure restait inchangée quel que soit l'instant considéré ; on peut donc reprendre le problème de la régulation en utilisant cette constatation, c'est à dire en remplaçant d'emblée dans les équations d'évolution, le vert V_t par son expression, ci-dessus calculée.

4.3.2 - Calcul du cycle optimal C_t

Rappelons que l'effet du vert optimal calculé précédemment est de maintenir les longueurs de queues dans un même rapport (cf. Chap. 3.2.). Les équations d'état d'un carrefour deux voies sont donc :

$$Q_{t_1}^{(1)} = \frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} \left[s_2 Q_t^{(1)} + s_1 Q_t^{(2)} + C_t \gamma + 2s_1 s_2 (L+a) \right]$$

$$Q_{t_1}^{(2)} = \frac{s_1}{s_2} Q_{t_1}^{(1)}$$

où on a posé : $\gamma = \alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2$

et le critère est :

$$J = \sum_{i=t}^{t+(n-1)} \left[(Q_i^{(1)})^2 + (Q_i^{(2)})^2 + \lambda^2 C_i^2 \right] + (Q_n^{(1)})^2 + (Q_n^{(2)})^2$$

Hormis les cas simples (n égale 2 ou 3), ce problème d'optimisation ne conduit pas à une expression analytique de la commande optimale C_t , car on doit déterminer à la fois le nombre n de cycles optimal et la séquence des cycles $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$. (Quoique cette méthode de résolution n'ait pas été appliquée à cause de sa complexité, on présente en annexe quelques résultats obtenus sur calculateur).

De plus, le fait que l'on emploie un critère à horizon fuyant nous oblige à recalculer les commandes à chaque cycle, ce qui minimise l'intérêt d'une recherche exacte d'une séquence (C_t) complète, cette recherche faisant intervenir des événements assez lointains dont on n'est pas du tout sûr.

Ces considérations nous incitent à mettre en place une seconde méthode de résolution fondée sur l'hypothèse que la période d'optimisation T est découpée en cycles égaux. Le problème de la régulation consiste à déterminer le nombre de cycles n tel que :

$$T = nc$$

qui minimise le critère J ci-dessus défini.

Les équations d'état sont pour un carrefour deux voies :

$$Q_{t_1}^{(1)} = \frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} |s_2 Q_t^{(1)} + s_1 Q_t^{(2)} + c\gamma + 2s_1 s_2 (L+a)|, \quad Q_{t_1}^{(2)} = \frac{s_1}{s_2} Q_{t_1}^{(1)}$$

Le critère est :

$$J = (Q_t^{(1)})^2 + (Q_t^{(2)})^2 + \lambda^2 C_t^2 + \sum_{i=t+1}^{t+(n-1)} [(Q_i^{(1)})^2 + (Q_i^{(2)})^2 + \lambda^2 C_i^2] + (Q_n^{(1)})^2 + (Q_n^{(2)})^2$$

il s'écrit moyennement un changement d'indice :

$$J = (Q_t^1)^2 + (Q_t^2)^2 + \sum_t^{t+(n-1)} \left[\left(1 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\right) (Q_i^1)^2 + \lambda^2 C_i^2 \right]$$

Les équations d'évolution deviennent :

$$Q_{t_1}^{(1)} = Q_t^{(1)} + \frac{\gamma s_2}{s_1^2 + s_2^2} C + 2 \frac{s_1 s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} (L+a)$$

$$Q_{t_1}^{(2)} = \frac{s_1}{s_2} Q_{t_1}^{(1)}$$

D'après ce système, on en déduit la valeur de $Q_i^{(1)}$ où i est un instant compris entre $|t, t+T|$:

$$Q_i^{(1)} = Q_t^{(1)} + i \left[\frac{\gamma s_2}{s_1^2 + s_2^2} C + \frac{2 s_1 s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} (L+a) \right]$$

En conséquence, le critère peut s'écrire explicitement :

$$J = (Q_t^1)^2 + (Q_t^2)^2 + n \alpha^2 C^2 + \left(1 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\right) \sum_{i=0}^{n-1} \left[(Q_t^1)^2 + 2(Q_t^1) i \left(\gamma \frac{s_2}{s_2^2 + s_1^2} C + A\right) + i^2 \left(\frac{\gamma s_2}{s_1^2 + s_2^2} C + A\right)^2 \right]$$

avec $\gamma = \alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2$

$$A = \frac{2 s_1 s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} (L + a)$$

Le calcul des sommes s'effectue facilement et connaissant la relation $n c = T$, le critère devient :

$$J = \frac{A'n^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E}{n}$$

où les coefficient A', B, C, D, E ont pour expression :

$$A' = \frac{A^2}{3}$$

$$B = \left(1 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\right) Q_t^1 A - \frac{A^2}{2} + \frac{2}{3} AT \frac{\lambda s_2}{s_1^2 + s_2^2}$$

$$C = \left(1 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\right) (Q_t^1)^2 + \left(1 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\right) Q_t^1 \left[\gamma \frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} T - A \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} \frac{\gamma^2 s_2^2}{(s_1^2 + s_2^2)^2} T^2 - AT \frac{\gamma s_2}{s_1^2 + s_2^2} + \frac{A^2}{6} \\
 D & = (Q_t^{(1)})^2 + (Q_t^{(2)})^2 - \left(1 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\right) Q_t^{(1)} \frac{\gamma s_2 T}{(s_1^2 + s_2^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 s_2^2}{(s_1^2 + s_2^2)^2} \\
 & \quad T^2 + \frac{1}{3} AT \frac{\lambda s_2}{s_1^2 + s_2^2} \\
 E & = \alpha^2 T^2 + \frac{1}{6} \frac{\gamma^2 s_2^2}{(s_1^2 + s_2^2)} T^2
 \end{aligned}$$

Le minimum de ce critère est obtenu pour $3 A' n^4 + 2B n^3 + C,^2 - E = 0$, équation du 4° ordre dont on conservera la racine positive. L'allure du critère est figurée ci-dessous (fig. : I.34) et on a démontré sur calculateur qu'il ne comportait qu'un seul minimum pour les valeurs positives de n .

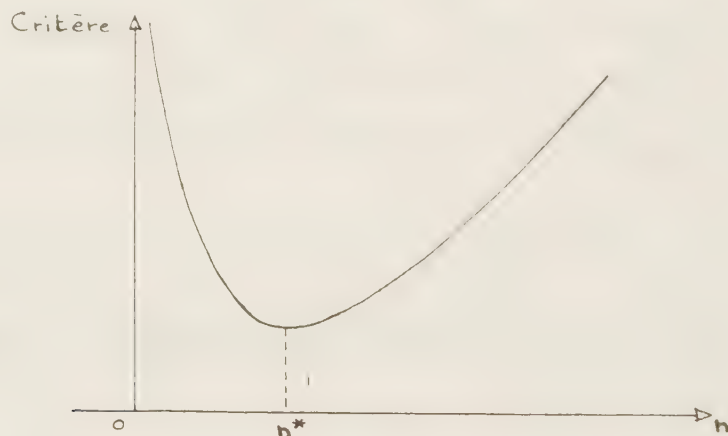


Fig. 1.34

En vue d'obtenir une commande en boucle fermée, la résolution de cette équation a été réalisée pour différentes valeurs des longueurs de queues initiales, des débits moyens d'arrivée et pour diverses valeurs du coefficient de pondération λ . Les résultats sont présentés figure I.35.

On remarque que les courbes représentatives du nombre de cycles n en fonction des longueurs de queues et des débits sont des hyperboles, ce qui signifie que le cycle optimal varie linéairement en fonction de ces grandeurs. Son expression est donc de la forme :

$C = a Q_t^{(1)} + b Q_t^{(2)} + d \alpha + e \beta + c_0$ où les coefficients a, b, d, e, c_0 dépendent à la fois des caractéristiques du carrefour (débits de saturation, temps perdus, etc...) et du coefficient de pondération λ .

Le programme FORTRAN présenté en annexe II réalise le calcul de ces coefficients d'après les caractéristiques du carrefour et le choix du coefficient λ^2 .

Le choix de ce coefficient de pondération λ^2 se fait à l'aide de graphes du type de celui montré figure I.36 sur laquelle on a tracé en fonction de λ^2 , les valeurs du cycle et l'accroissement de queue fourni par le modèle.

Les considérations physiques permettent le choix de ce coefficient ; par exemple, on désirera limiter les longueurs de queue pendant la période de saturation, ce qui entraînera un accroissement de queue maximum permis. Cette courbe fournira alors le cycle minimum réalisant ces conditions et fixera la valeur du coefficient λ^2 .

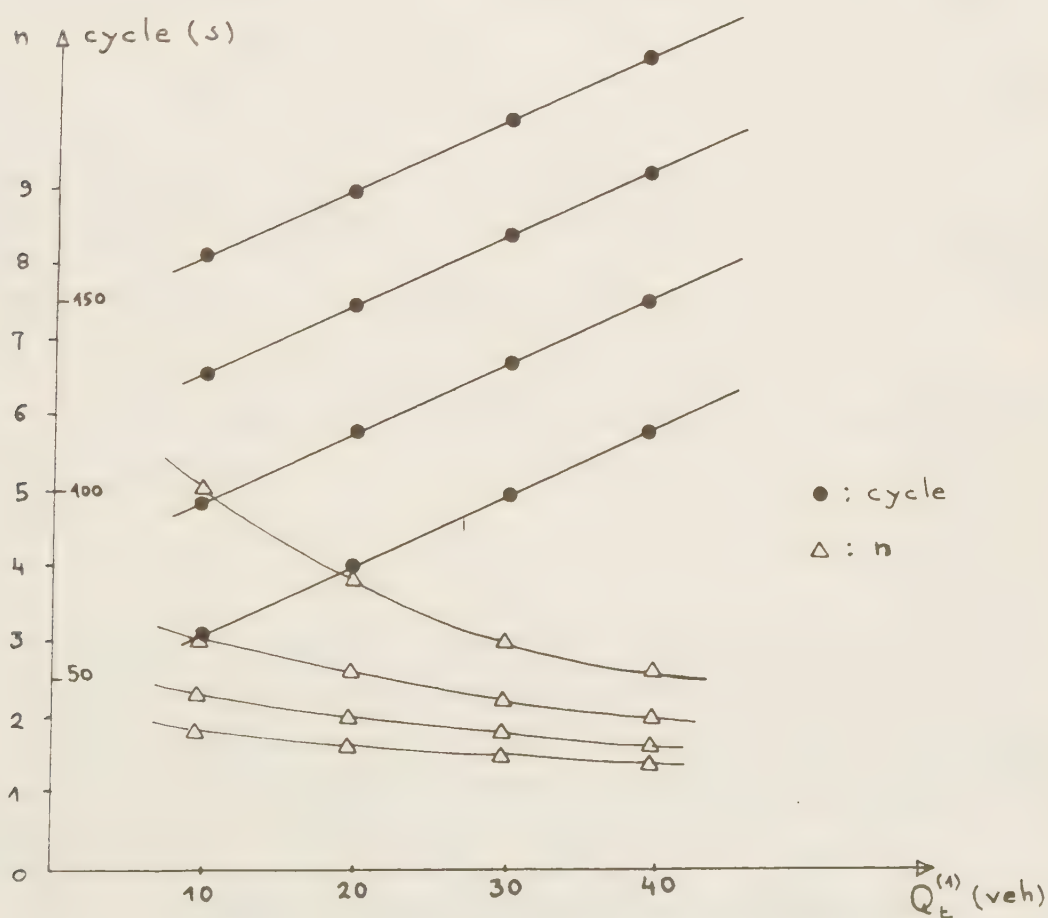


Fig. 1.35

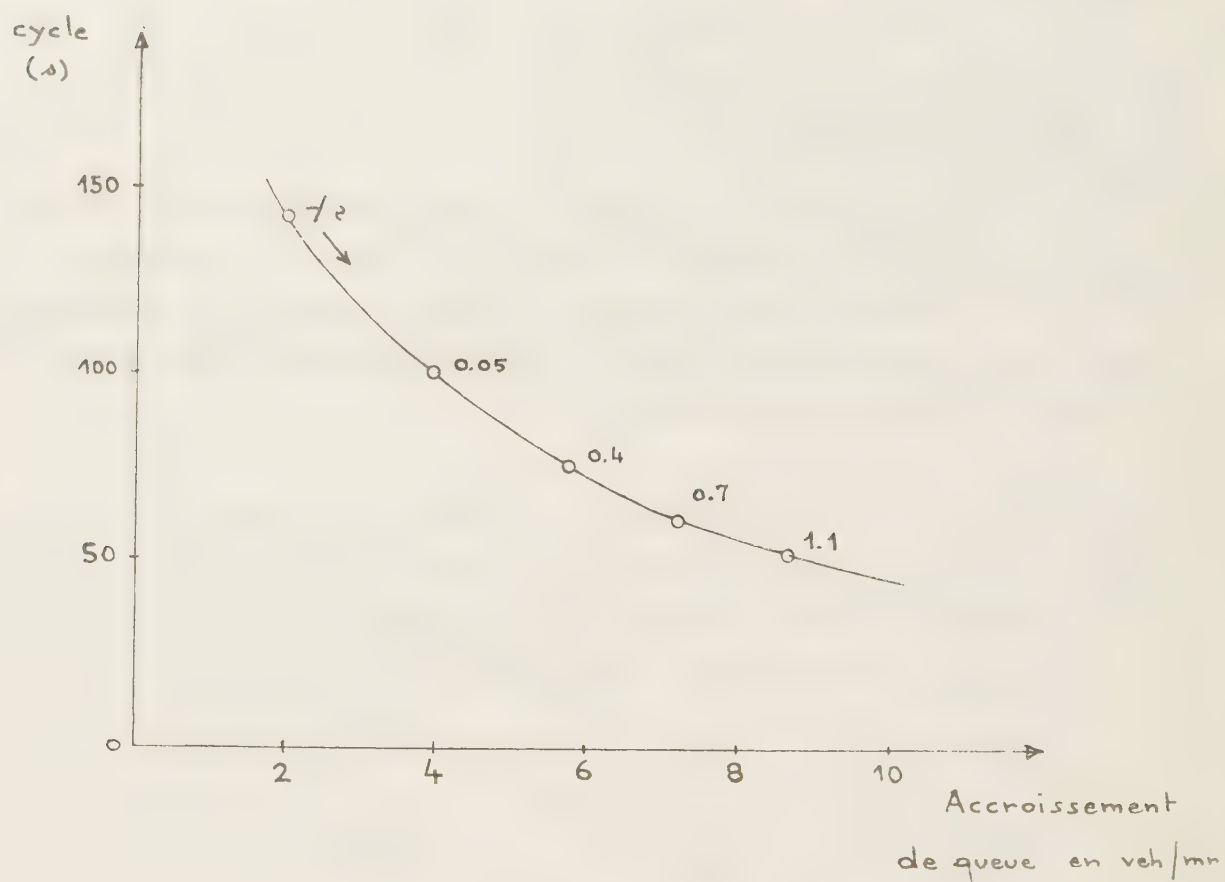


Fig. 1.36

4.4 - TRANSITION ENTRE LES DEUX REGIMES

Après avoir défini les politiques de commande optimale pour les conditions de trafic saturé et non saturé, nous devons maintenant définir un critère de saturation qui va nous permettre de passer d'un régime à l'autre.

4.4.1 - Passage du régime non saturé au régime saturé

Supposons que le carrefour ne soit pas saturé et qu'il soit en régime permanent. Les commandes optimales sont alors les commandes minimales compatibles avec les contraintes de non saturation.

(cf 4-2 et figure I.37a)

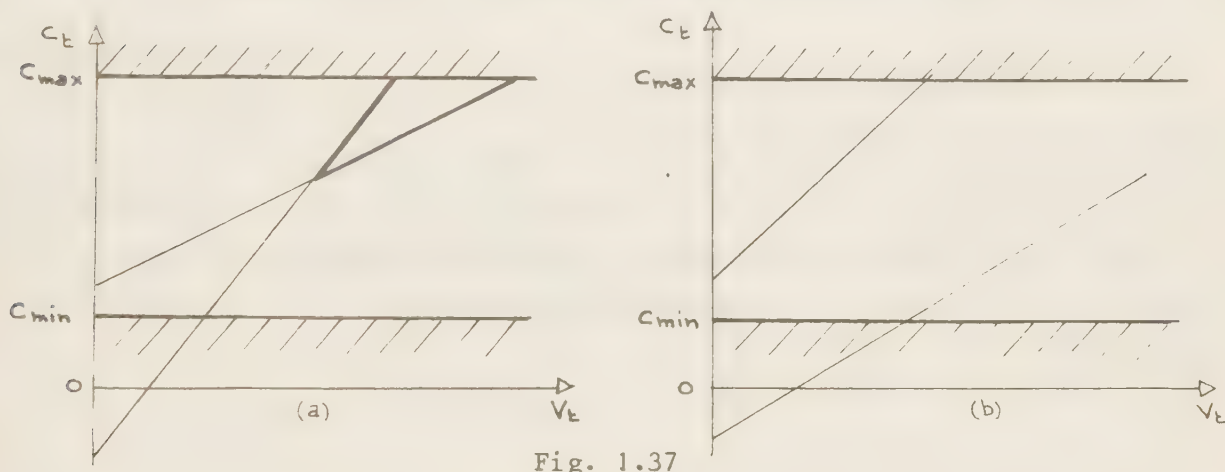


Fig. 1.37

L'intersection de ces droites existera si les conditions de non saturation sont réalisées:

$$s_1 s_2 - s_1 \beta - s_2 \alpha > 0$$

Sinon, le carrefour se saturera certainement, c'est à dire que la zone des commandes admissibles disparaît (fig. I.37 b).

Le passage du régime non saturé au régime saturé sera décidé après l'examen du signe de l'expression ci-dessus (fig. I.37 b), ou si les commandes calculées dépassent le domaine permis.

4.4.2 - Passage du régime saturé au régime non saturé

Le régime saturé existe tant qu'il y demeure des longueurs de queue en fin de feu vert. La commutation entre ces deux régimes pourra être décidée après un test sur ces longueurs de queue.

L'application du vert optimal (ch. 3.2.2) ramène les deux longueurs de queue dans un même rapport, ce qui signifie que les deux voies sortiront ensemble de saturation. Les tests ci-dessus peuvent donc être réduits en un seul test :

$$Q_t^1 + s_1 L < (s_1 - \alpha) \text{ vert}$$

ou

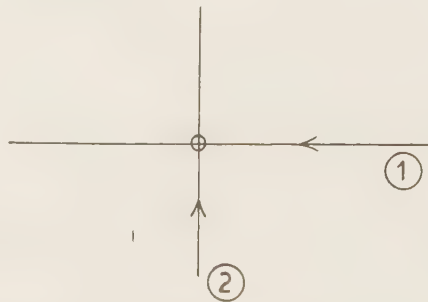
$$Q_t^2 + s_2 L < (s_2 - \beta) (C\text{-vert} - 2a - L)$$

Nous sommes désormais en mesure de former l'organigramme général de commande d'un carrefour à deux voies, en tenant compte des différentes contraintes apparaissant sur les commandes.

4.5 - ORGANIGRAMME GENERAL DE COMMANDE - RESULTATS EN SIMULATION

On présente cet organigramme figure I.38 sur lequel les cases en traits forts sont des résultats de tests effectués soit en simulation, soit grâce à des mesures directes de longueur de queue sur le site.

La figure I.39 est une simulation d'un carrefour à deux voies sur lequel a été implanté le système de régulation précédemment décrit. Chaque voie est caractérisé par son débit de saturation s_i et son débit d'arrivée $\alpha, (\beta)$.

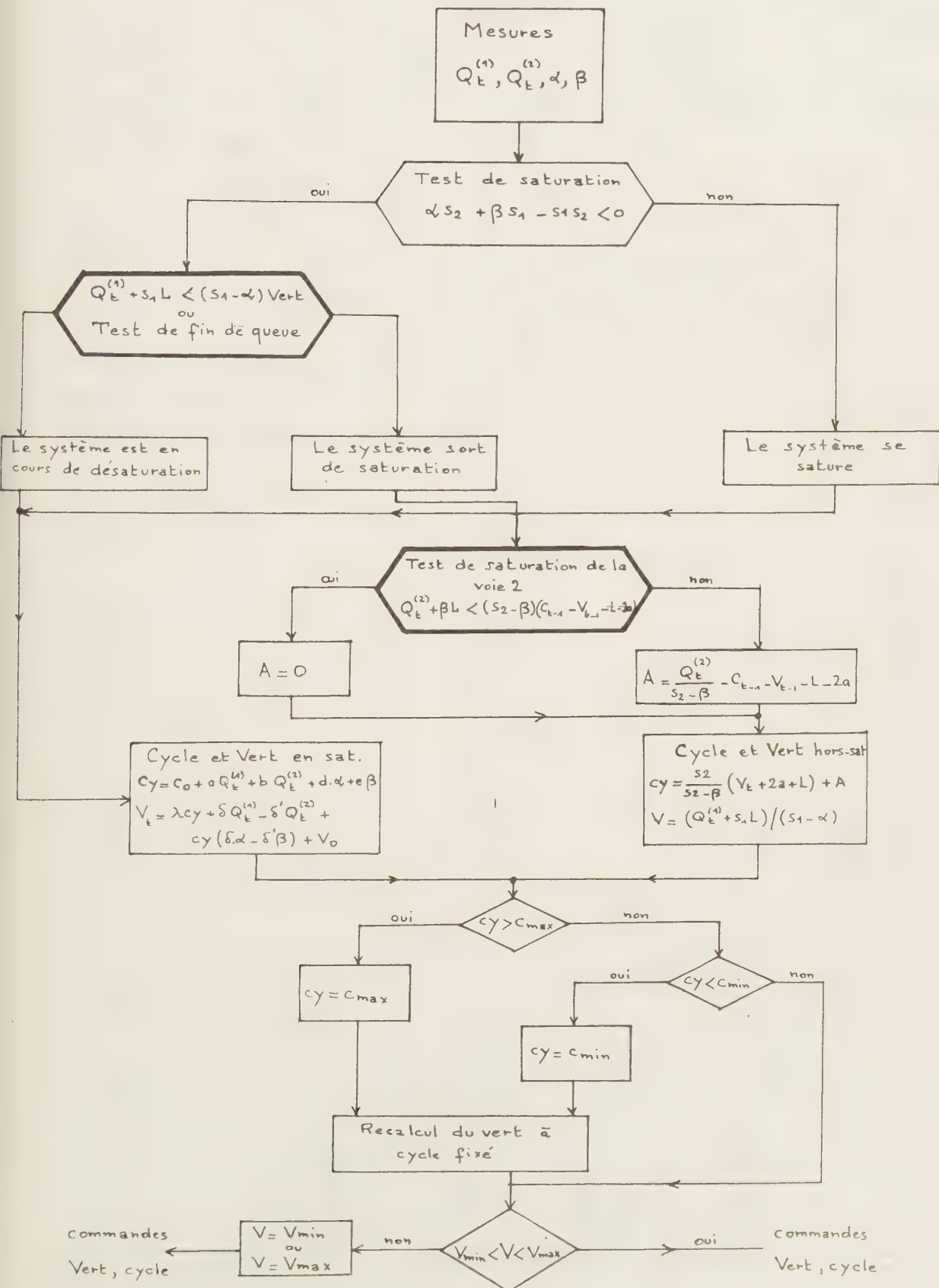


On peut suivre sur cette figure, en fonction des variations des débits α, β , l'évolution des longueurs de queues et des deux commandes optimales vert et cycle. On remarque l'influence du vert optimal sur le rapport des deux longueurs de queue (cf. chapitre 3 - 2.2).

Notons que, dans cet essai, les variations de cycle ne peuvent excéder 10%, hypothèse qui sera reprise dans la deuxième partie lors de l'application sur site. Il n'est pas bon, en effet, que les variations de cycle soient trop importants pour des raisons psychologiques.

Fig. 1.38

Organigramme de commande



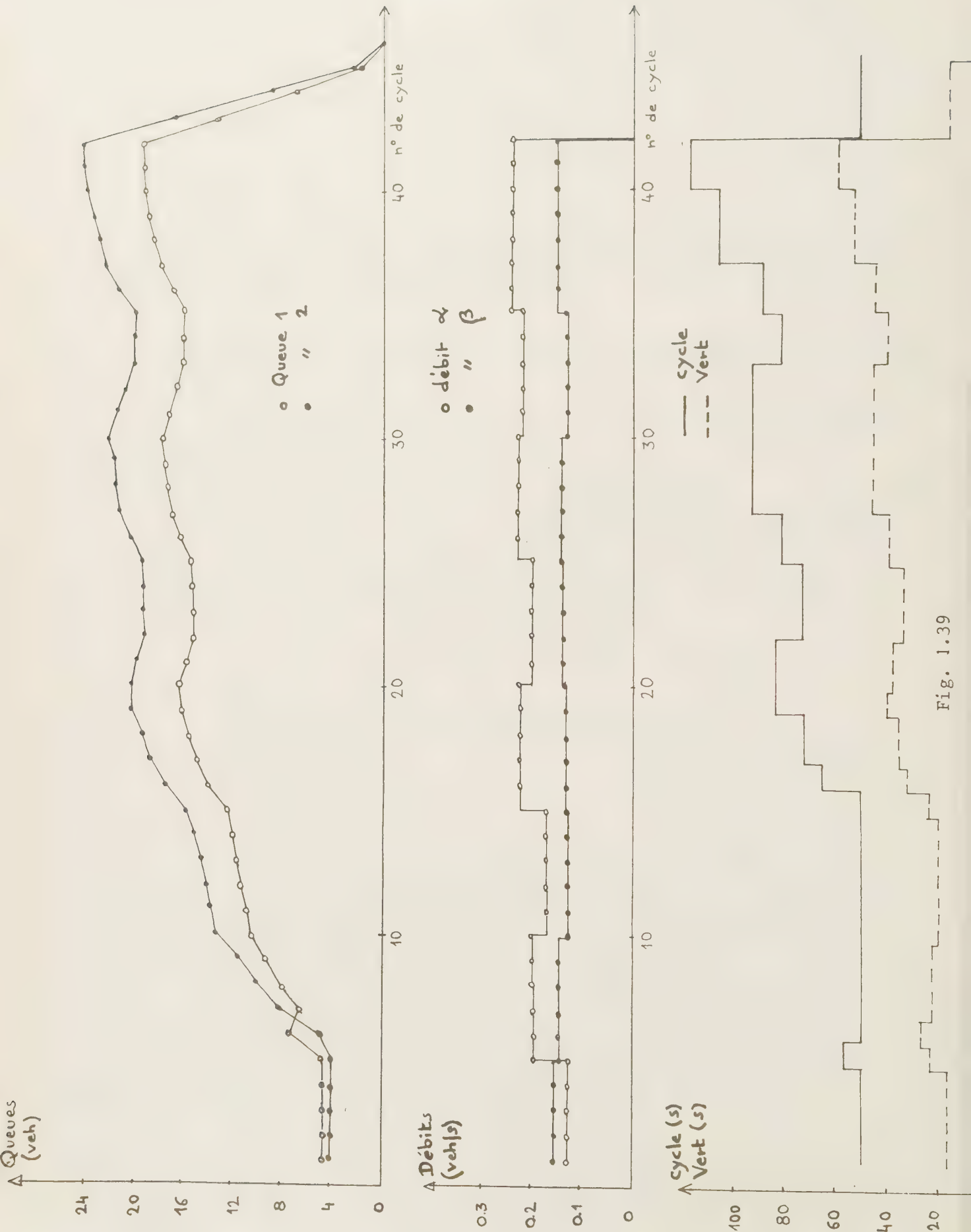


Fig. 1.39

Conclusions :

On a dégagé dans ce chapitre une politique de commande des feux d'un carrefour quel que soit son régime de fonctionnement. Les grandeurs de commande (vert et cycle) obtenues sont fonction des états (longueurs de queue) et des débits d'arrivée et l'organigramme précédemment défini est capable de choisir le régime le mieux approprié aux conditions réelles de trafic (fig. I 30)

Les résultats obtenus en simulation ainsi que le temps de calcul, de l'ordre du dixième de seconde sur IBM 1130, ont montré que cette politique de commande était facilement applicable sur site moyennant une estimation correcte des longueurs de queue en fin de rouge et des débits d'arrivée.

La deuxième partie de ce mémoire concerne l'application sur un carrefour réel à deux branches sur lequel existent déjà, une infrastructure de mesures (capteurs) et certains moyens de calcul constitués d'un mini-ordinateur et de divers interfaces de commande des feux.

Annexe 1

CALCUL D'UNE SEQUENCE OPTIMALE DE CYCLES

Rappelons le problème d'optimisation évoqué au paragraphe (4.3.2)

"Déterminer la séquence des cycles $\{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ qui minimise le critère :

$$J = (Q_n^{(1)})^2 + (Q_n^{(2)})^2 + \sum_{i=t}^{t+(n-1)} \left[(Q_i^{(1)})^2 + (Q_i^{(2)})^2 + \lambda^2 C_i^2 \right]$$

compte tenu des équations d'états :

$$\begin{aligned} Q_{t_1}^{(1)} &= \frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} \left[s_2 Q_t^{(1)} + s_1 Q_t^{(2)} + C_t \gamma + 2s_1 s_2 (L+a) \right] \\ Q_{t_1}^{(2)} &= \frac{s_1}{s_2} Q_{t_1}^{(1)} \quad \text{avec } \gamma = \alpha s_2 + \beta s_1 - s_1 s_2 \end{aligned}$$

et des contraintes

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \quad \begin{array}{l} T \text{ désignant la période d'optimisation} \\ n \text{ entier} \end{array}$$

La période d'optimisation T est découpée en n cycles $C_0, C_1, \dots$. Le problème ci-dessus consiste à déterminer à la fois le nombre de cycle optimal puis la séquence optimale $C_0, C_1, \dots$.

La résolution est faite sur calculateur et utilise une méthode de programmation non linéaire (HOOKE et JEEVES avec contraintes) pour calculer la séquence $\{C_i\}$ et une méthode de programmation entière pour le calcul de n optimal.

L'organigramme de calcul est présenté figure I.40 et a pour entrées, les longueurs de queues initiales $Q_t^{(1)}, Q_t^{(2)}$ ainsi que les débits d'arrivée α, β .

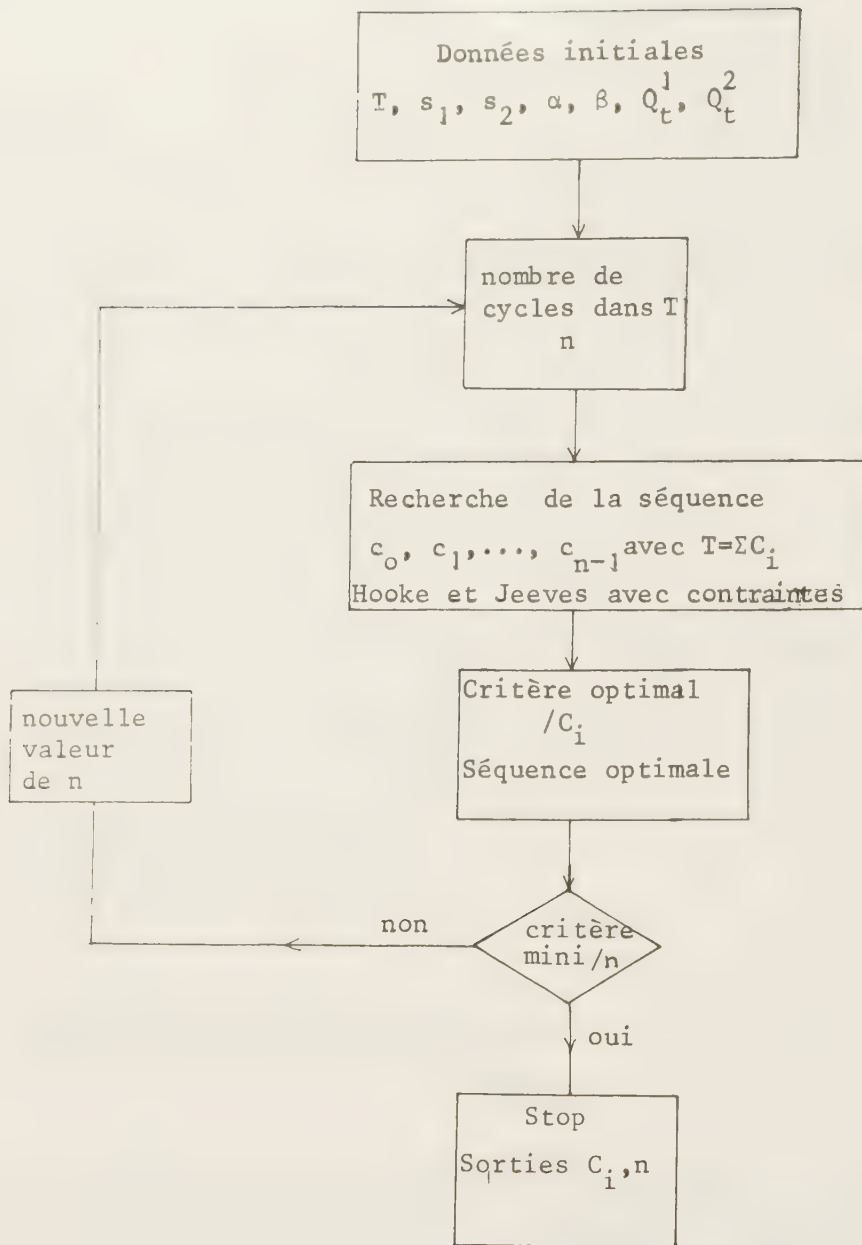


Fig. 1.40

Les courbes suivantes (fig. I.41) représentent l'évolution du critère en fonction du nombre de cycles, la séquence $\{C_i\}$ étant optimale et quelques exemples de séquences optimales.

L'emploi d'un critère à horizon fuyant $|t, t+T|$ nous amène à ne conserver que les valeurs du cycle initiales C_0 . Afin d'obtenir une commande

en boucle fermée sur les états et sur les perturbations, il est donc nécessaire d'examiner les variations du cycle C_0 en fonction de ces grandeurs et essayer d'en déduire une expression mathématique:

$$C_0 = f \left[Q_t^{(1)}, Q_t^{(2)}, \alpha, \beta \right] \quad \text{utilisable.}$$

On présente figure I.42 quelques exemples de variations du cycle C_0 en fonction des longueurs de queues et des débits d'arrivée.

Les courbes obtenues sont difficilement exploitables à cause de leur caractère non linéaire. Celui-ci est dû au fait que le nombre de cycles doit être entier, ce qui limite sérieusement les variations du cycle.

D'autre part, la fonction f que l'on cherche à définir doit être suffisamment simple pour permettre une implantation en ligne des algorithmes et un fonctionnement rapide. Ces résultats ont donc conduit à la recherche d'une deuxième méthode (4.3.2).

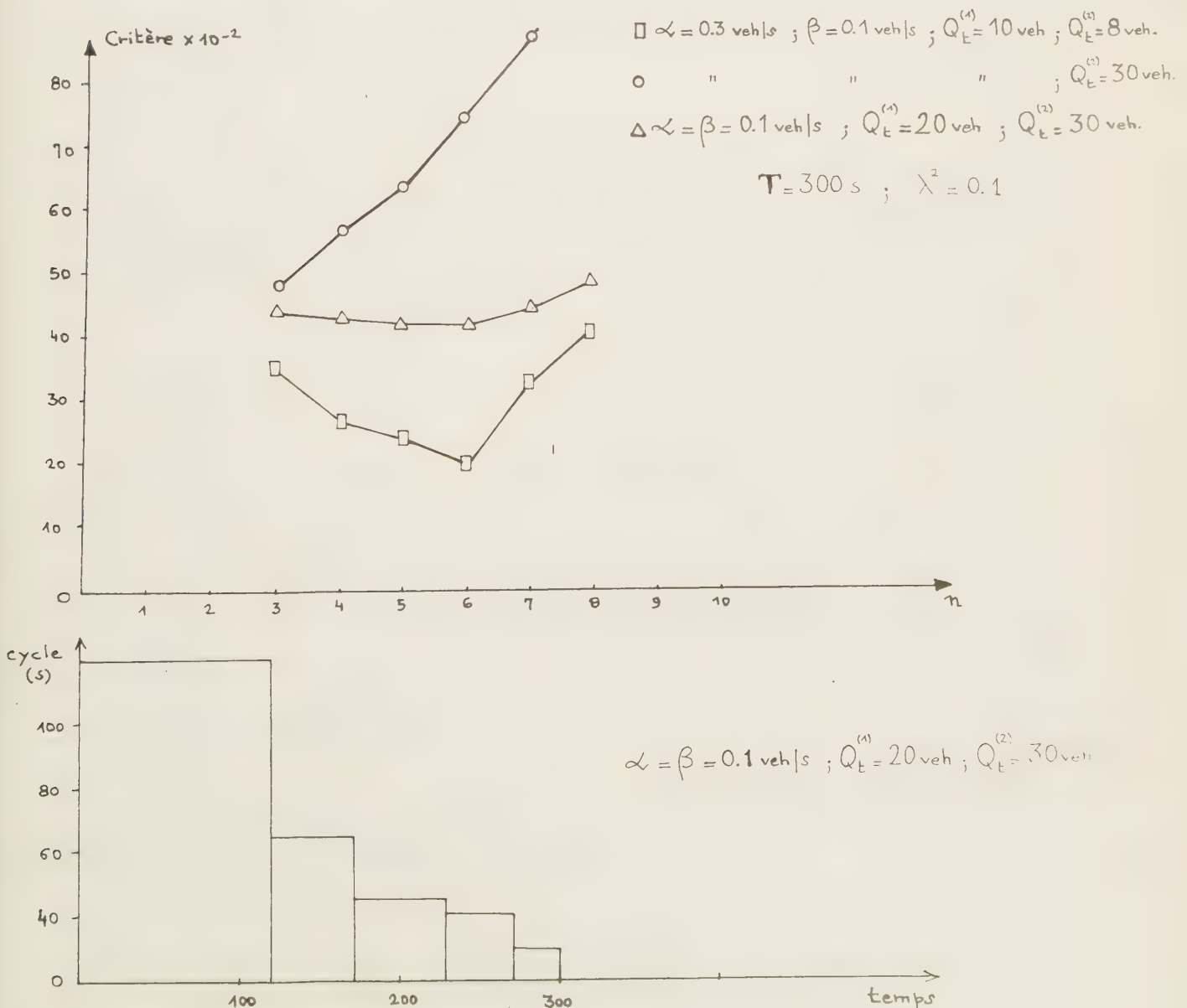


Fig. 1.41

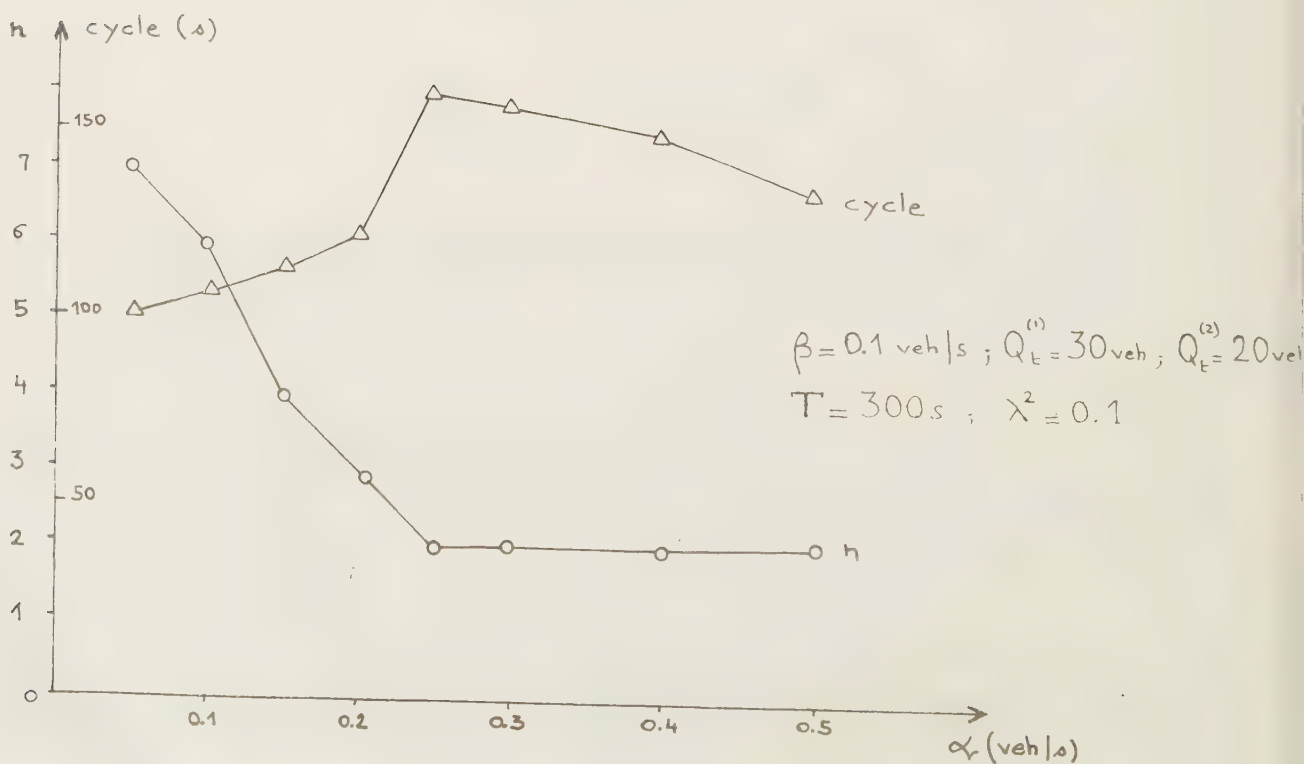
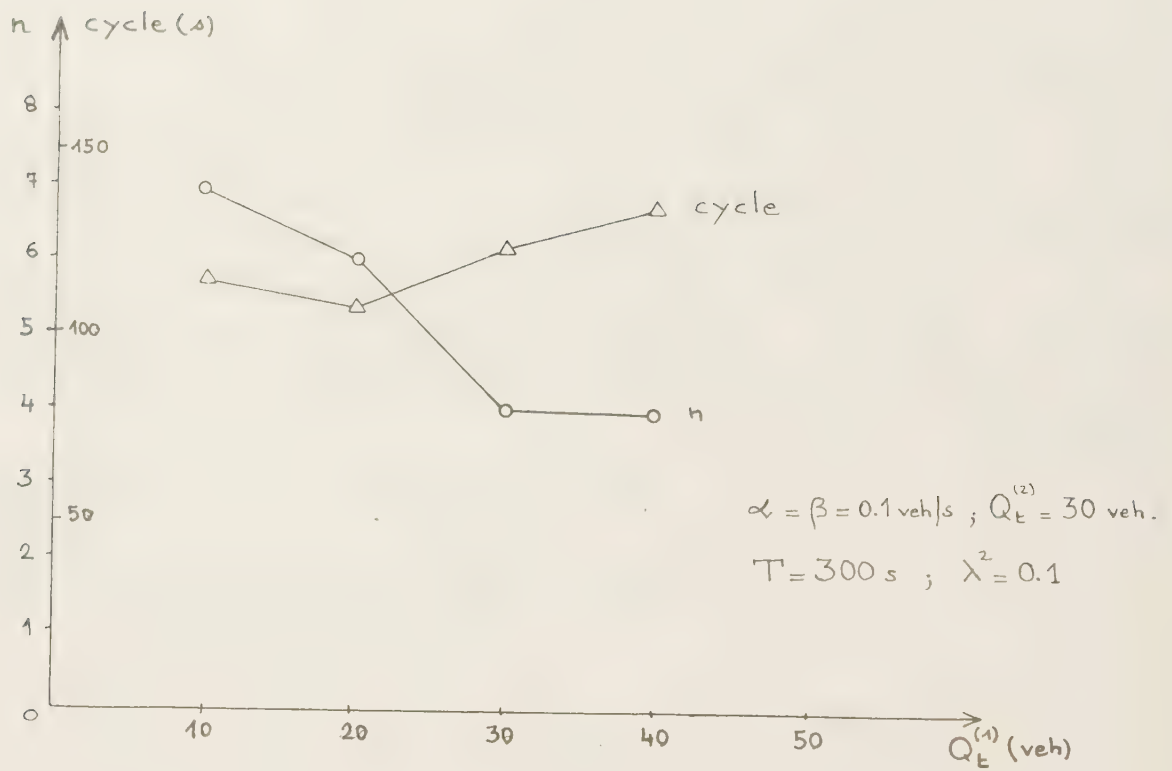


Fig. 1.42

Annexe 2. Calcul du cycle optimal

```

DIMENSION X(5),XB(5),ROOTR(4),ROOTI(4),G1(5),G2(5)
Q20=10.
BETA=0.1
ALPHA=0.1
9 IF (ALPHA-0.4) 7,7,8
7 RMU=0.1
Q10=10.
S1=0.47
S2=0.47
T=300.
RL=3.
A=6.
WRITE(3,105) ALPHA,BETA,Q10,Q20
105 FORMAT(//,1X,'ALPHA=1,54,2,5X,BETA=1,54,2,5X,Q10=1,54,2,5X,Q20=1,54,2,5X')
1020=1,F5.1)
SAT=ALPHA*S2+BETA*S1-S1*S2
RC=2.*S1*S2*S2*(RL+A)/(S1*S1+S2*S2)
RA=(SAT*SAT*S2*S2)/((S1*S1+S2*S2)*(S1*S1+S2*S2))
RP=(T*SAT*S2)/(S1*S1+S2*S2)
X(1)=(RMU+RA/6.)*T*T
X(2)=Q10*Q10+Q20*Q20-12*(1+RL+RP)*S1*S2*S2/(S1*S1+S2*S2)
12A=T*T/2.+RP/3.
X(3)=(1.+S1*S1/S2/S2)*X(2)+12A
13.-RP+RC*RC/6.
X(4)=(1.+S1*S1/S2/S2)*X(3)+12A
X(5)=RC*RC/3.
X(1)=-X(1)
X(2)=0.
X(4)=2.*X(4)
X(5)=3.*X(5)
CALL POLRT(X,XB,4,ROOTR,ROOTI,IER)
WRITE(3,100)
100 FORMAT(//,10X,'RACINES REELLES ET IMAGINAIRES')
WRITE(3,101)(ROOTR(I),I=1,4),(ROOTI(I),I=1,4)
101 FORMAT(/,10X,4(F10.3,5X))
DO 1 J=1,4
IF(ROOTR(J))1,2,2
2 IF(ROOTI(J))1,11,1
11 RAC=ROOTR(J)
1 CONTINUE
NAC=RAC
IF(RAC-NAC-0.5)3,3,4
4 NAC=NAC+1
3 CY=T/NAC
WRITE(3,102) CY
102 FORMAT(/,10X,'LE CYCLE OPTIMAL EST',5X,E10.3)
N=NAC+1
Q1(1)=Q10
DO 5 J=2,N
Q1(J)=Q1(J-1)+SAT*S2*CY/(S1*Q1+S2*S2)+RC
G2(J)=S1*Q1(J)/S2
5 CONTINUE
WRITE(3,102)(Q1(J),J=1,N)
WRITE(3,103)(G2(J),J=1,N)
103 FORMAT(/,2X,8(F10.3,2X))
ALPHA=ALPHA+0.05
GO TO 9
8 STOP
END

```

Annexe 3. Simulation de la commande optimale.

```

// FOR
* IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK)
* LIST SOURCE PROGRAM
  IC=0
  CT=17.
  VT=42.
  RL=3.
  S1=0.5
  S2=0.4
  CMIN=50.
  A=1.
  Q1=4.
  Q2=3.
50 IF(IC-1000)51,60,60
51 READ(2,100) ALPHA,BETA
  ALPHA=ALPHA*2.
  IF(ALPHA*S2+BETA*S1-S1*S2)1,1,2
1 IND=-1
  GO TO 32
2 IND=1
32 CY=4.5*Q1+3.6*Q2+550.*(0.4*ALPHA+0.5*BETA)-150.
  VE=(CY*S2+S2*S1*Q1-S2*Q2+CY*(S1+ALPHA-S2*BETA)+S1*S1*RL-S2*S2*(RL
  1+A+A))/(S1*S1+S2*S2)
  IF(CY-0.9*CT)6,6,4
4 IF(CY-1.1*CT)5,5,6
5 CY=CT
  VE=VT
6 IF(CY-CMIN)7,8,3
8 CY=CMIN
  VE=(CY*S2+S2*S1*Q1-S2*Q2+CY*(S1+ALPHA-S2*BETA)+S1*S1*RL-S2*S2*(RL
  1+A+A))/(S1*S1+S2*S2)
9 IF(VE-VMIN)10,10,11
10 VE=VMIN
  GO TO 32
11 IF(VE-CY+A+A+VMIN)12,12,13
13 VE=CY-A-A-VMIN
12 IF(Q1+S1*RL-(S1-ALPHA)*VE)14,14,15
15 IF(Q2+S2*RL-(S2-BETA)*(CT-VT-A-A))14,14,16
16 CT=CY
  VT=VE
  Q1=Q1+ALPHA*CY-S1*(VE-RL)
  Q2=Q2+BETA*CY-S2*(CY-VE-RL-A-A)
  WRITE(3,101) CY,VE,A-1,CE,ALPHA,BETA
  IC=IC+1
  GO TO 50
14 IF(Q2+S2*RL-(S2-BETA)*(CT-VT-A-A))17,17,18
17 QA=0.
  GO TO 19
18 QA=Q2/(S2-BETA)-CT-VT-A-A-RL

```

PAGE 2

```
10 VE=(O1+S1+RL)/(S1-BETA)
   CY=S2*(VE+A+A+RL)/(S2-BETA)+QA
   IF(CY-0.9*CT)20,21,21
21 IF(CY-1.1*CT)22,22,20
22 CY=CT
   VE=VT
20 IF(CY-CMIN)23,23,24
23 CY=CMIN
   VE=(ALPHA*(ALPHA+CY-BETA)+BETA+1)/(ALPHA+1)
24 IF(VE-VMIN)25,25,26
25 VE=VMIN
26 IF(VE-CY+A+A+VMIN)27,27,28
28 VE=CY-A-A-VMIN
27 CT=CY
   VT=VE
   Q1=ALPHA*(CY-VE)
   Q2=BETA*(V1+A+A)
   WRITE(3,102) CY,VE,Q1,Q2,ALPHA,BETA
   IC=IC+1
   GO TO 50
60 STOP
100 FORMAT(2F7.3)
101 FORMAT(//,5X,'SAT',6(F7.3,5X))
102 FORMAT(//,10X,6(F7.3,5X))
   END
```

FEATURES SUPPORTED
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 52 PROGRAM 846

END OF COMPILATION

// XEQ

BIBLIOGRAPHIE

-
- | 1 | AUTHIE G. "Réalisation d'un simulateur hybride de trafic urban et son utilisation pour la conduite du trafic à cycle fixe."
Thèse de Docteur-ingénieur. TOULOUSE Déc. 1971.
- | 2 | M.C. DUNNE "Algorithm for traffic control"
R.B. POTTS Opération. Research, 12, pp 870 - 881 (1964)
"Analysis of a computer control of an isolated intersection."
Symposium on theory of Traffic Flow NEW-YORK 1965
- | 3 | B.D. GREENSHIELD "Quality and theory of traffic flow."
Sale University - New Haven - Connecticut 1961
"Traffic performance at urban street intersections."
Sale University - New Haven - Connecticut 1947
- | 4 | S.E.R.C. "Dispositifs électroniques adaptés à la gestion des infrastructures routières et à la régulation du trafic."
- | 5 | M.G. SINGH "Hierarchical strategies for the on line control of urban road traffic signals."
5th IFAC Symposium. may 1973 - ROME
- | 6 | J.C. WARDROP "Electronic control of traffic."
Proceeding World traffic engineering conférence
Thème V. 1961.
- | 7 | F.V. WEBSTER "Traffic signals."
COBB Road research technical paper 56 HM 50 - 1966



Deuxième Partie

APPLICATION SUR SITE DES ALGORITHMES DE COMMANDE

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'application sur un carrefour réel des algorithmes de commande établis dans la première partie. Après avoir présenté la topographie et la configuration de l'intersection étudiée, nous nous attacherons à définir, à l'aide du matériel disponible sur le site, une politique de mesure des longueurs de queue et des débits moyens d'arrivée, ce qui nous permettra d'envisager l'inclusion, dans le système informatique existant, de notre algorithme de commande optimale des feux.

Nous terminerons cette partie par la mise en ligne des algorithmes de calcul et l'exploitation des résultats obtenus.



Chapitre 1

PRESENTATION DU SITE

Ce chapitre décrit d'une manière détaillée l'infrastructure existante du carrefour à commander, l'implantation et le fonctionnement des feux soumis à certaines contraintes pratiques, la disposition des capteurs sur le site et les moyens de calcul mis à notre disposition en vue de cette application.

1.1 - DESCRIPTION DE L'INFRASTRUCTURE

Le carrefour sur lequel nous nous sommes proposés de mettre en place et de tester les algorithmes de commande est situé à l'extrémité d'un axe coordonné comportant une dizaine d'intersections réparties sur environ 1 km 500. Cet axe comporte deux sens de circulation, le plus souvent séparés par un terre-plein central, et constitués chacun de 4 à 5 files de 3 m 50. Disposant d'une voirie importante, cet axe draine actuellement quelques 90 000 véhicules par jour.

Le carrefour QUAIS/ALSACE-LORRAINE supporte un débit total extrêmement important (55 000 véh./jour) qui le classe pour ce critère en tête de tous les carrefours de l'axe. Sa situation par rapport aux autres carrefours autorise à le considérer comme une intersection isolée, la distance avec le carrefour immédiatement adjacent étant de l'ordre de 350 m.

L'implantation d'un schéma de circulation (fig. 2.1) permet une circulation aisée dans le sens SUD/NORD alors que des conflits apparaissent entre le sens NORD/SUD des Quais et le Cours Alsace-Lorraine. C'est ce conflit que nous nous proposons de résoudre dans cette partie.

Le détail du carrefour est montré figure 2.2 ainsi que l'implantation "in situ" des feux de signalisation. Cette figure ne concerne que les deux courants de circulation incompatibles ainsi que les feux intéressants à commander (1 et 3) et qui feront l'objet de notre étude.

1.2 - FONCTIONNEMENT DES FEUX - CONTRAINTES IMPOSEES

Les feux que nous nous proposons de commander sont indiqués sur la figure ci-après (fig. 2.2).

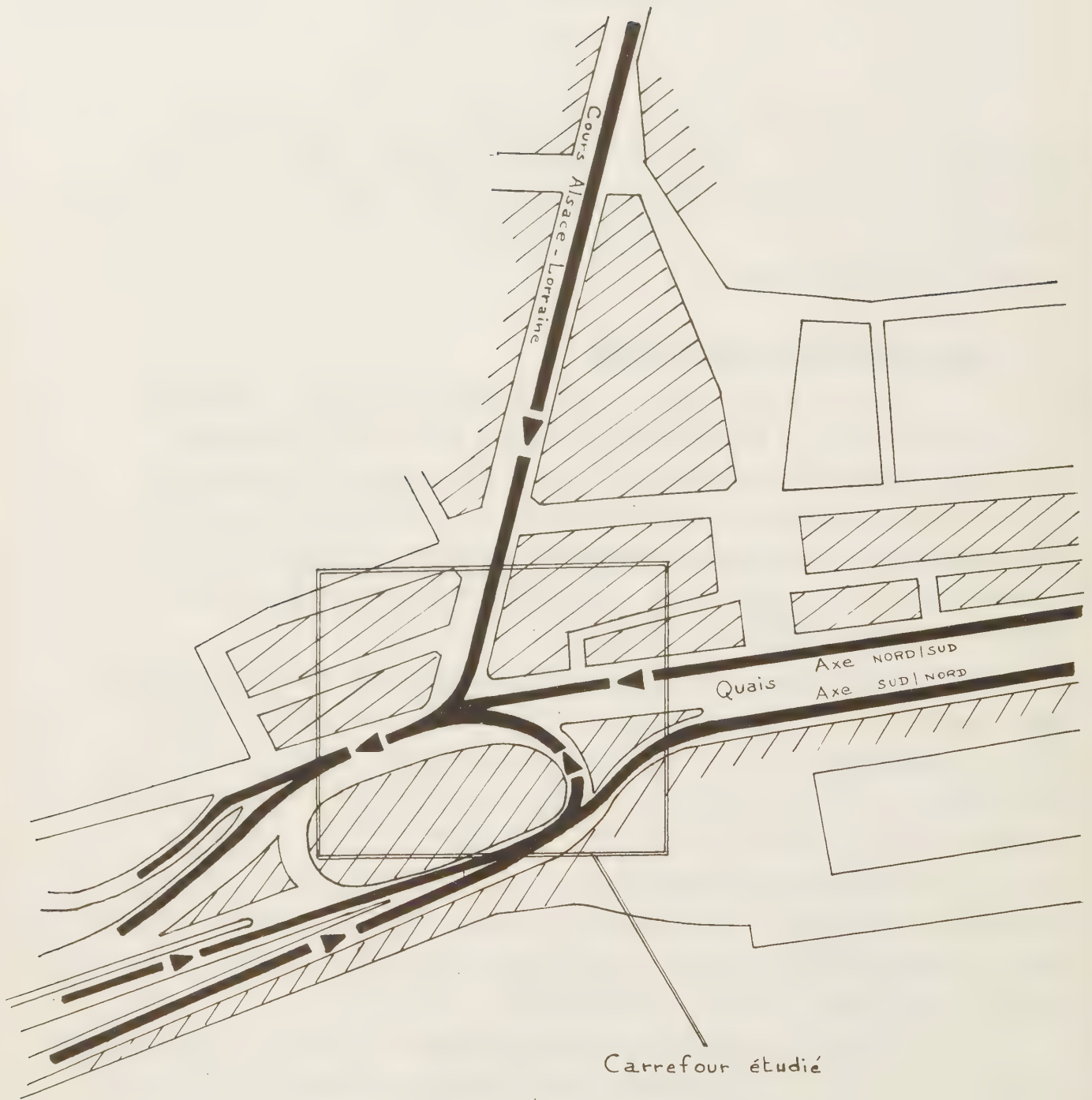


Fig. 2.1

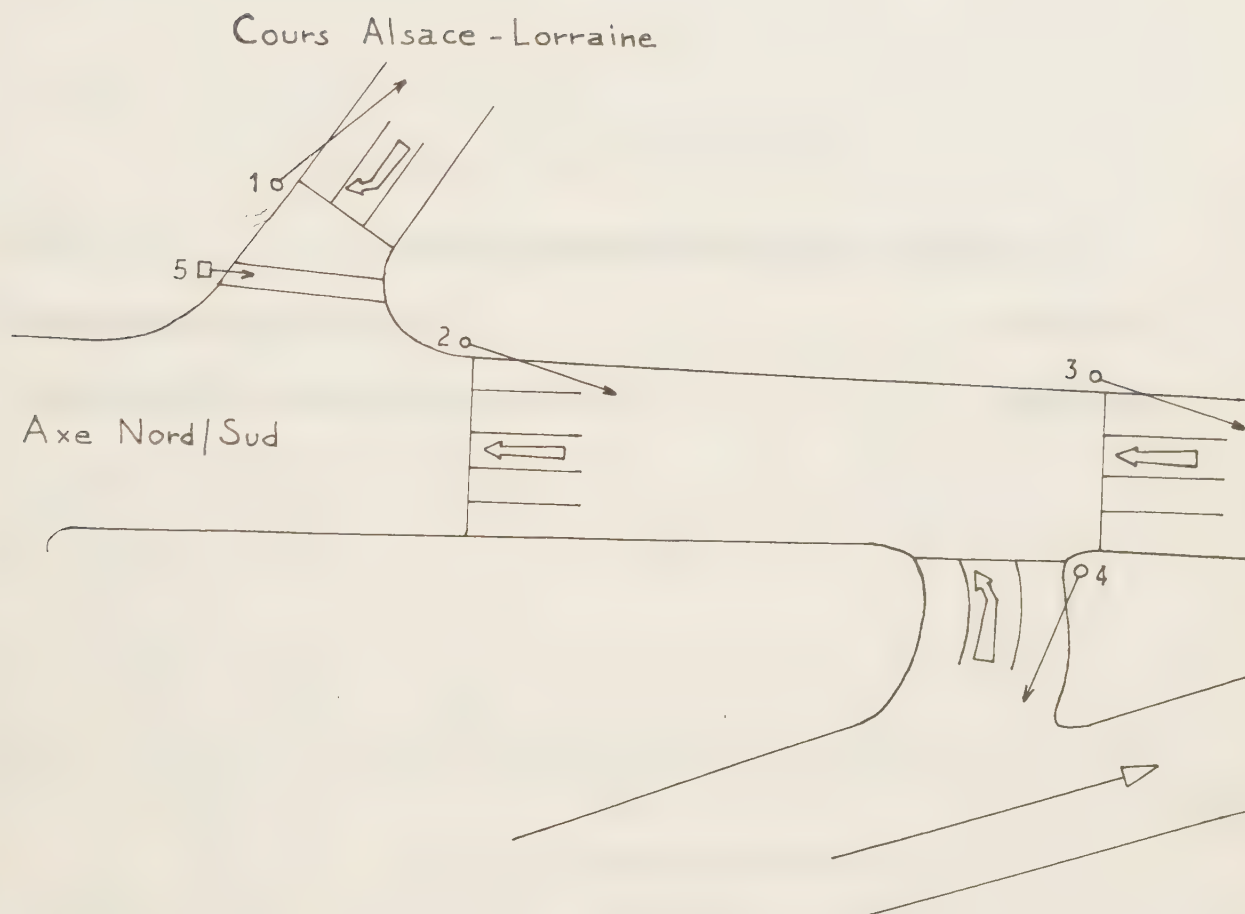
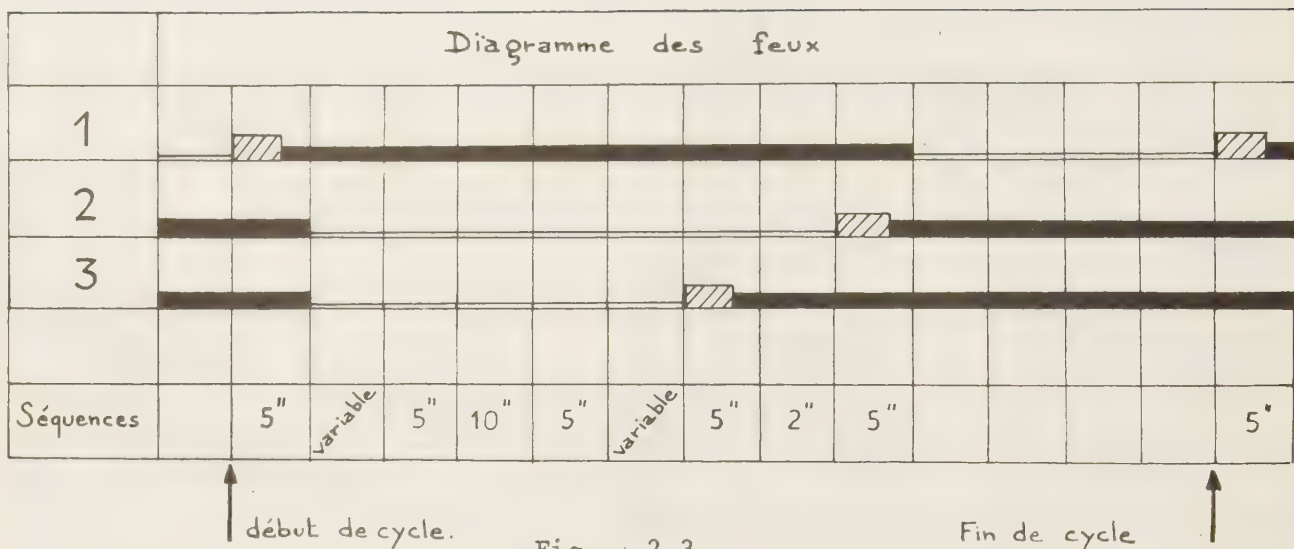


Fig. 2.2

Répetons que les feux 1 et 3 sont les plus importants du carrefour puisqu'ils sont directement en relation avec les débits d'arrivée.

Le feu 4 permet l'ouverture de la bretelle de retournement, les véhicules ainsi libérés allant se stocker dans le sas situé entre les feux 2 et 3. Les comptages préliminaires ont montré que ce mouvement de véhicules était peu important.

Le fonctionnement des feux 2 et 3 est lié ; en effet, les débuts de vert sont synchrones, mais le feu 2 est coupé après le feu 3 de manière à libérer complètement le sas. Le diagramme de fonctionnement est montré figure 2.3.



Le cycle commence cinq secondes avant l'apparition du vert sur les feux 2 et 3 situés sur les quais.

Les séquences imposées sont dues :

- aux valeurs fixes prises par le jaune (3s) et le rouge intégral (2s)
- au décalage prédéterminé entre les feux 2 et 3 (7s)
- à la valeur du vert minimum du feu 3 (20s)

Contraintes pratiques

Les feux concernés par la régulation sont les feux 1 et 3. Soit C la valeur du cycle, on a :

$$\text{Vert } 1 + \text{Vert } 3 + 17 = C$$

a) La valeur minimum du cycle est 60 s. Elle est liée aux valeurs minima des verts 1 (23s) et des verts 3 (20s). Donc, si le carrefour fonctionne avec un cycle de 60 s, les valeurs de vert sont imposées.

b) Pour un cycle quelconque supérieur à 60 s, les valeurs de $\overline{v_{eff}}$ sont limitées par :

Vert 1 minimum = 23 s d'où Vert 3 max = C - 40

Vert 3 minimum = 20 s

c) On impose la valeur maximum du cycle à 130 s.

1.3 - PRISES D'INFORMATIONS

Les détecteurs disponibles sur le terrain sont des boucles magnétiques d'induction qui délivrent une impulsion chaque fois qu'une masse métallique traverse son champ d'action. Associés à un capteur, ils permettent de déterminer les variables principales caractérisant le trafic (comptages, vitesses, débits).

L'implantation de ces détecteurs est montrée sur la figure 2.4.

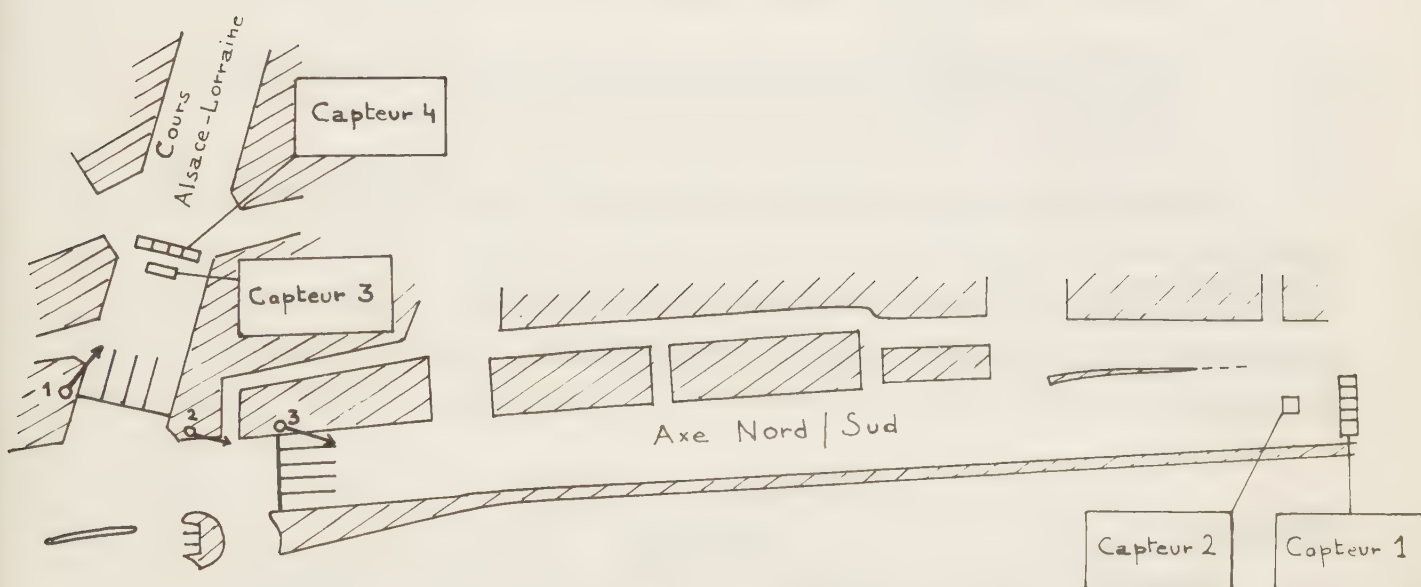


Fig. 2.4

Leur rôle et leur utilisation sont les suivants :

Capteur 1 : Constitué de 5 boucles magnétiques disposées sur les 5 voies de circulation, il sera utilisé en compteur et, convenablement traitées, ses indications nous fourniront les débits d'arrivée et les longueurs de queue. Sa distance au feu 3 est 200 m.

Capteur 2 : C'est une boucle magnétique qui servira de test de longueur de queue. Sa distance au feu 3 est 190 m.

Capteur 3 : Sa fonction est identique à celle du capteur 2. Sa distance feu-capteur est 150 m.

Capteur 4 : Identique au capteur 1, il sert de compteur sur le cours Alsace-Lorraine. Sa distance au feu 1 est 160 m.

Remarque : Ce genre de détecteur, associé à des capteurs adéquats, a une précision de mesure de l'ordre de 2 %.

1.4 - MOYENS DE CALCUL

Le traitement des informations est pris en charge par un mini-calculateur qui assure également le calcul des commandes, la transmission de ces grandeurs et la mise à jour des comptes-rendus.

Ses caractéristiques principales sont :

- Mémoire de 8 K mots de 16 bits tous directement adressables
- Cycle de base : 1,76 μ s
- Onze registres auxquels est adjoint un opérateur arithmétique.
- 16 niveaux d'interruption
- Canal d'accès direct mémoire
- Langage assembleur
- Protection mémoire contre les coupures secteur et redémarrage automatique.

Les périphériques associés au calculateur sont un télétype et une mémoire de masse (cassettes).

De nombreux interfaces permettent l'entrée des impulsions venant des capteurs et la sortie en puissance des grandeurs de commande (attaque des feux).

Conclusion :

Munis de moyens précédemment décrits, nous sommes maintenant en mesure de traiter les informations disponibles et d'en déduire les grandeurs fondamentales intervenant dans nos algorithmes, à savoir les longueurs de queue en fin de rouge et les débits probables d'arrivée.

Chapitre 2

METHODES DE MESURES DES LONGUEURS DE QUEUE ET DES DEBITS D'ARRIVEE

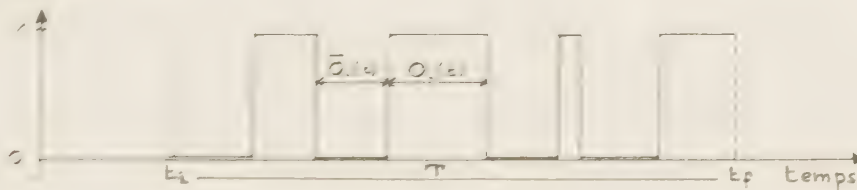
Après avoir effectué un rapide tour d'horizon des méthodes existantes permettant la mesure des longueurs de queue, nous proposerons une méthode fondée principalement sur les moyens dont nous disposons et nous validerons ces calculs par des mesures manuelles effectuées sur le site.

2.1 - METHODES EXISTANTES DE MESURE DES LONGUEURS DE QUEUE

La mesure des longueurs de queue ne paraît pas encore avoir trouvé de solution correcte. On ne connaît actuellement aucun appareil ni aucun système permettant cette mesure directe sur le site. On a recours le plus souvent à des moyens numériques traitant les informations élémentaires délivrées par les capteurs.

2.1.1 - Mesures basées sur l'occupation d'un capteur de présence

Un capteur de présence placé en un point de la chaussée délivre des impulsions de largeurs variable selon la longueur et la vitesse du véhicule qui le traverse. (fig.2.6)



Définissons les différentes grandeurs susceptibles d'être mesurées à l'aide de ce capteur :

T : période de mesure

$O_i(t)$: temps d'occupation microscopique du véhicule i ,

$\bar{O}_i(t)$: défini figure 2.6

$\frac{O_i(t)}{O_i(t) + \bar{O}_i(t)}$: taux d'occupation microscopique du véhicule i

$O(t) = \sum_{i=1}^n O_i(t)$: temps d'occupation macroscopique du capteur

$\tau = \frac{O(t)}{T}$: taux d'occupation macroscopique du capteur.

A partir de telles mesures, il est possible d'estimer la concentration (nombre de véhicules par mètre de chaussée), la longueur de queue ou la densité spatiale dans la zone de chaussée située en aval du capteur.

Par exemple, si L_0 est la longueur moyenne des véhicules, la densité spatiale de véhicules sur une longueur l de chaussée est :

$$D(l) = \frac{l \cdot O(t)}{L_0 \cdot T}$$

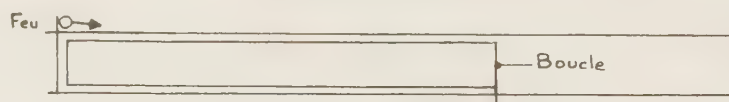
La densité spatiale de véhicules dans la zone de formation des queues varie périodiquement en fonction du rouge et du vert. Sa mesure est possible en utilisant deux détecteurs, un au début, l'autre à la fin de la zone de queue. Son expression est alors :

$$D(l, T) = \frac{l}{2 L_0 T} (O_1(t) + O_2(t))$$

Lorsqu'un détecteur émet un signal continu, c'est-à-dire si $O_1(t) \geq T - \epsilon$, tous les véhicules arrivant pendant T seront arrêtés. On peut donc déterminer de cette manière le nombre de véhicules en attente devant le feu |1|, en prenant T égal à la durée du rouge.

2.1.2 - Mesure directe à l'aide d'une boucle de grande dimension

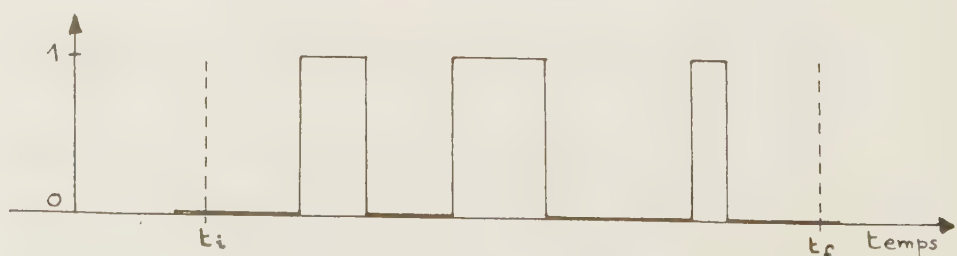
Cette méthode consiste à placer une boucle magnétique de grande dimension sur la voie où existent des longueurs de queues.



Les inconvénients de cette méthode sont évidents ; la mise en place de tels détecteurs est délicate et onéreuse et la mesure de longueur de queue est limitée à la dimension de la boucle.

2.1.3 - Mesures à l'aide des grandeurs macroscopiques d'occupations

Un capteur situé en avant d'un feu délivre des impulsions comme ci-dessous (fig 2.7)



On utilise comme information le temps d'occupation macroscopique du capteur, la période de mesure étant la longueur du rouge R ($t_f - t_i = R$)

avec t_i : instant de début du rouge

t_f : instant de fin du rouge

Cette information, utilisée conjointement avec des mesures directes sur le site, permet d'établir des algorithmes d'estimation de la longueur de queue en fin du rouge.

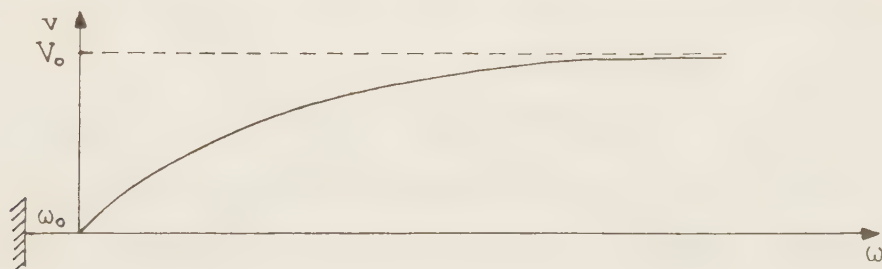
Les études effectuées sur ce sujet [1] ont montrées que la relation entre l'information et la mesure sont approximativement linéaires. Mais d'après une conclusion de [1], la détermination difficile de l'emplacement idéal du capteur minimise l'intérêt de cette méthode.

2.1.4 - Mesures à l'aide des grandeurs microscopiques d'occupation [1]

L'idée générale de cette méthode est que la vitesse d'un véhicule est l'image de la distance qui le sépare d'un obstacle. La mesure de cette vitesse à l'aide d'un capteur inductif par exemple (double boucle), associée à des courbes théoriques vitesse-distance à l'obstacle et à des répartitions statistiques de vitesses libres, permet de calculer une estimation de la longueur de queue en fin de rouge.

a) Définition d'une loi de ralentissement des véhicules

La courbe théorique simple représentant cette loi est une exponentielle.

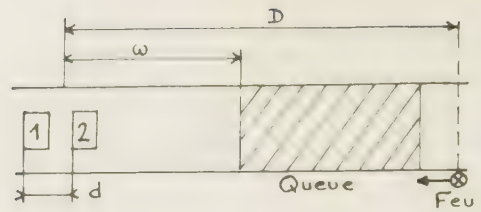
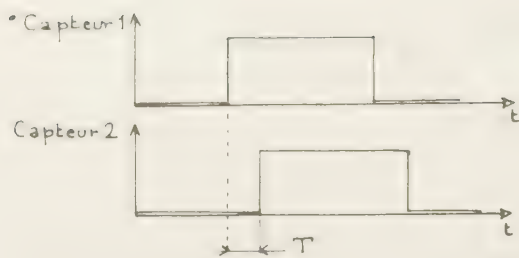


$$v = V_0 \left(1 - e^{-\frac{\omega}{k}} \right)$$

avec k constante d'espace à déterminer et V_0 la vitesse libre du véhicule. Ces vitesses libres obéissent à une répartition statistique donnée.

b) Mesure de la vitesse d'un véhicule

Deux capteurs identiques sont distants de d et sont associés à deux détecteurs. Les signaux émis par ces derniers lors du passage d'un véhicule auront la forme suivante :



La vitesse du véhicule sera alors : $v = \frac{d}{T}$; Cependant, cette relation n'est valable que si les deux détecteurs sont parfaitement identiques. En réalité leurs seuils de détection sont différents ce qui introduit une erreur de mesure sur la vitesse qui s'exprime par :

$$v = \frac{d}{T} + \epsilon \quad (\epsilon \text{ erreur de mesure})$$

c) Utilisation des mesures et filtrage

La mesure de la vitesse d'un véhicule à l'instant i (v_i) permet, grâce à la courbe théorique définie en a), de déterminer une mesure y_i de la longueur de queue Q_i . Mais, à cause des erreurs de mesure de la vitesse et du caractère théorique de la courbe a), cette valeur de Q_i est entachée d'une certaine erreur δ'_i , de sorte que l'on peut écrire :

$$y_i = Q_i + \delta'_i$$

L'équation d'évolution de la longueur de queue pendant la durée du rouge est :

$$Q_{i+1} = Q_i + L_o + \delta_i$$

avec L_o longueur moyenne des véhicules exprimée en mètres,

δ_i séquence aléatoire de moyenne nulle, d'écart type connu σ_δ ,

Q_{i+1} , Q_i les longueurs de queue entre deux mesures i et $i+1$

Si on suppose que les séquences δ_i et δ'_i sont centrées, gaussiennes, indépendantes, d'écart type σ_δ et $\sigma_{\delta'}$, les équations du filtre de KALMAN s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i &= \hat{Q}_{i-1} + L_o + K_i (y_i - \hat{Q}_{i-1} - L_o) \\ K_i &= \frac{M_i}{\sigma_{\delta'}^2} \quad \text{et} \quad M_i = \sigma_{\delta'}^2 \frac{M_{i-1} + \sigma_{\delta_i}^2}{M_{i-1} + \sigma_{\delta_i}^2 + \sigma_{\delta'}^2} \end{aligned}$$

Ce filtre délivrera son information à la dernière mesure avant la fin du rouge. Il doit donc fonctionner en synchronisme avec le feu.

Physiquement, la précision des mesures dépend de la distance du capteur à la longueur de queue. Cependant, lors d'une période de pointe, il est nécessaire d'employer plusieurs capteurs fonctionnant sur le principe ci-dessus.

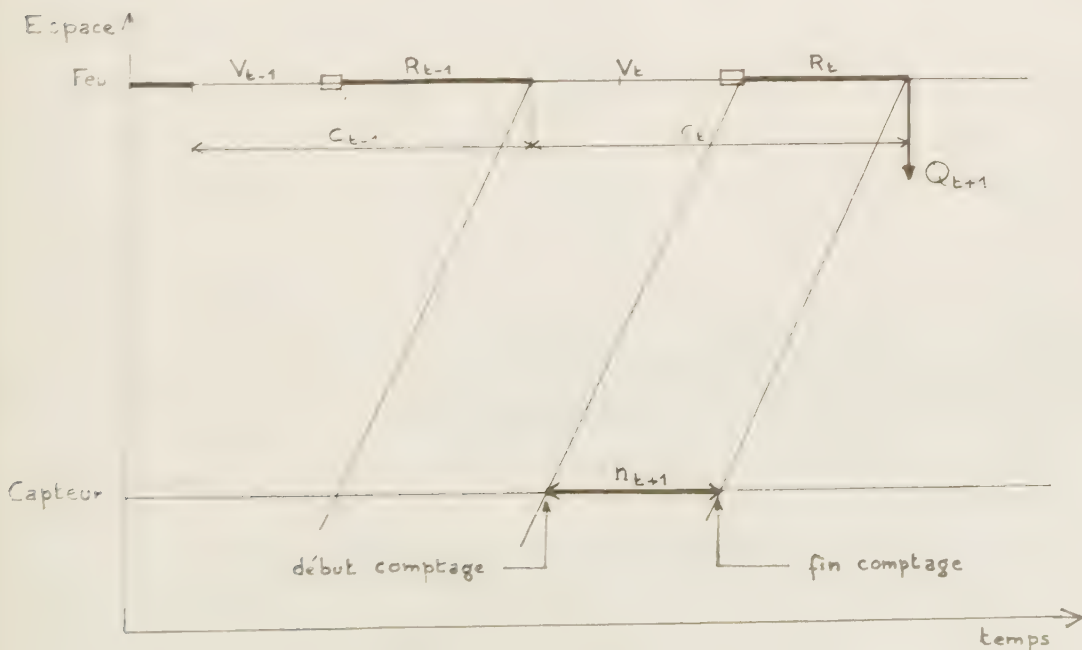
2.2 - PRESENTATION DES METHODES DE MESURES UTILISEES

Les méthodes de mesure de longueur de queue présentées ci-dessus nécessitent toutes des études préliminaires poussées et une campagne préalable de mesures capables de définir tous les éléments des algorithmes. D'autre part, le choix de la méthode conditionne le choix et l'emplacement du matériel et demande une partie calcul importante, peut être incompatible avec le traitement temps réel du processus.

Dans ce paragraphe, on a mis au point une équation statique de mesure des longueurs de queue à partir des moyens dont on disposait, c'est à dire à partir de la nature et de l'implantation des capteurs sur le terrain. Notons cependant que, dans le cas général, le choix et l'emplacement des capteurs sont à la disposition de l'utilisateur.

Estimation des longueurs de queue

Prenons le cas particulier de la voie NORD/SUD qui comporte des capteurs de mesure situés à environ 200 m du feu et représentons le diagramme espace-temps de circulation sur lequel figure l'emplacement du capteur. (fig 2.10)



soient D la distance feu-capteur

R_t la longueur du rouge

V la vitesse des véhicules dans la zone considérée : V est une donnée

Q_{t+1} la longueur de queue à la fin du cycle c_t

V_t la valeur du vert, R_t la durée du rouge

La valeur de cette longueur de queue Q_{t+1} dépend directement des comptages effectués en aval par le capteur (n_{t+1}) pendant la période de temps R_t .

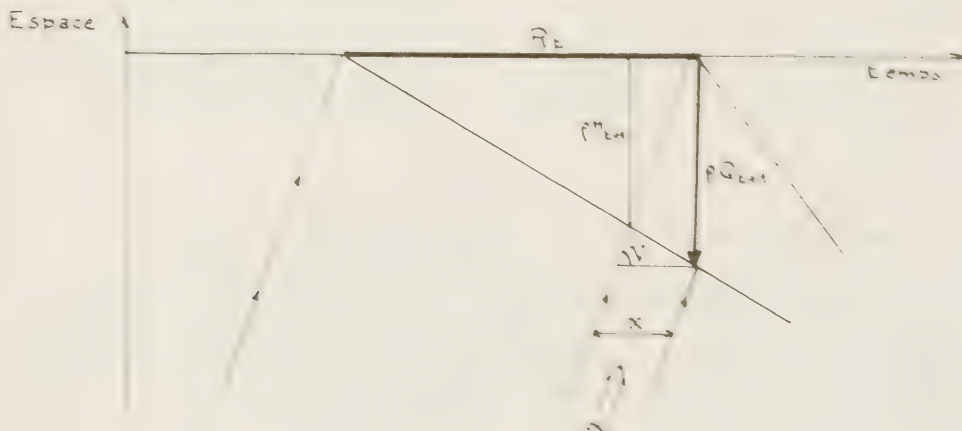
Le débit moyen d'arrivée sur le rouge R_t est $\frac{n_{t+1}}{R_t} = \beta_t$ exprimé en véhicules par seconde.

Deux cas se présentent selon le degré de saturation de la voie :

1 - Si la voie n'est pas saturée, c'est à dire s'il n'existe pas de véhicules en attente à la fin du vert V_t , l'expression de Q_{t+1} est :

$$Q_{t+1} = n_{t+1} (1 + \alpha)$$

α étant un terme correctif, dû à la formation de la queue, que nous allons calculer grâce au diagramme espace-temps suivant :



R_t la durée du rouge en secondes.

soient V la vitesse moyenne d'arrivée exprimée en m/s

α la distance moyenne intervéhicule en m/veh

$$\text{on a : } V = \frac{Q_{t+1}}{x}$$

$$\text{Or, } Q_{t+1} = n_{t+1} + \alpha x \Rightarrow Q_{t+1} = \frac{n_{t+1}}{1 - \frac{\alpha V}{V}}$$

L'expression ci-dessus se généralise aisément à condition de recalculer à chaque cycle le terme correctif γ_t contenant le nombre de véhicules qui n'ont pu franchir le feu lors des cycles précédents. Elle devient :

$$Q_{t+1} = n_{t+1} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{V} \frac{n_{t+1}}{R_t}} + (n_t^1 + \gamma_t - n_t^2)$$

Si la quantité $(n_t^1 + \gamma_t - n_t^2)$ est positive, le terme γ_t se calcule aisément grâce aux comptages précédents :

$$\begin{aligned} \gamma_t &= n_{t-1}^1 + \gamma_{t-1} - n_{t-1}^2 & \text{si } \gamma_t > 0 \\ \gamma_{t-1} &= n_{t-2}^1 + \gamma_{t-2} - n_{t-2}^2 & \text{si } \gamma_{t-1} > 0 \\ &\text{etc.....} \end{aligned}$$

Estimation des débits d'arrivée

Pour appliquer les algorithmes de commande, on doit estimer le débit moyen d'arrivée sur le cycle C_{t+1} . Le capteur nous fournit les résultats des comptages n_t , n_t^1 , n_{t+1} , n_{t+1}^1 déjà utilisés dans le calcul des longueurs de queue.

Le débit moyen d'arrivée sur le cycle C_{t-1} est :

$$\alpha_{t-1} = (n_t + n_{t-1}^1 - n_{t-1}) / C_{t-1} \text{ en veh/s}$$

Celui sur le cycle C_t est :

$$\alpha_t = (n_{t+1} + n_t^1 - n_t) / C_t \text{ en veh/s}$$

L'estimation du débit moyen α_{t+1} sera calculée par interpolation à partir de α_t et α_{t-1} soit :

$$\alpha_{t+1} = (\alpha_t + \alpha_{t-1})/2$$

On propose une justification de cette estimation en 3.2.

2.3 - VALIDATION DES EQUATIONS D'ESTIMATION DES LONGUEURS DE QUEUES

Les équations d'estimation étant écrites, on doit vérifier que

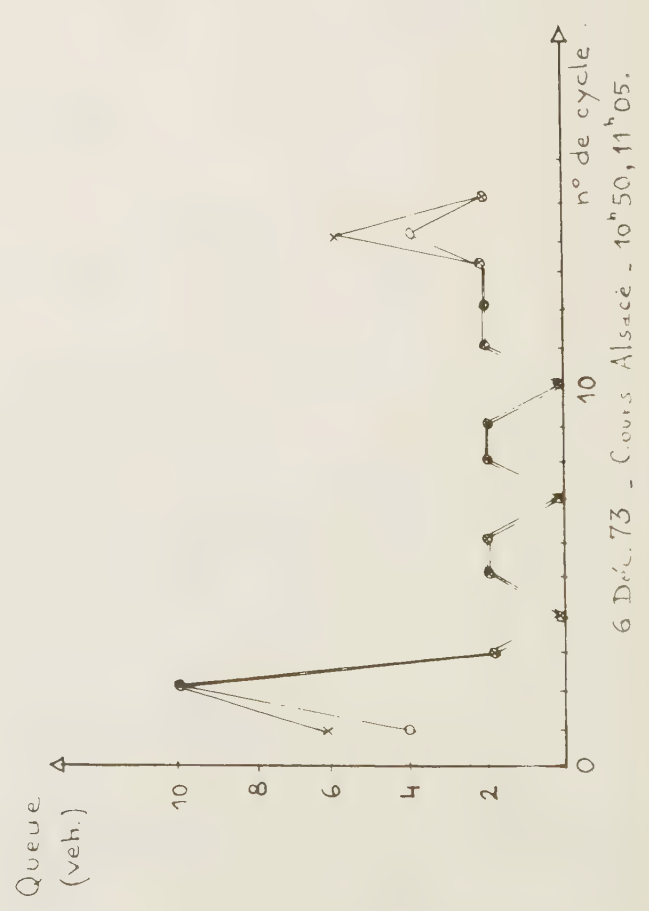
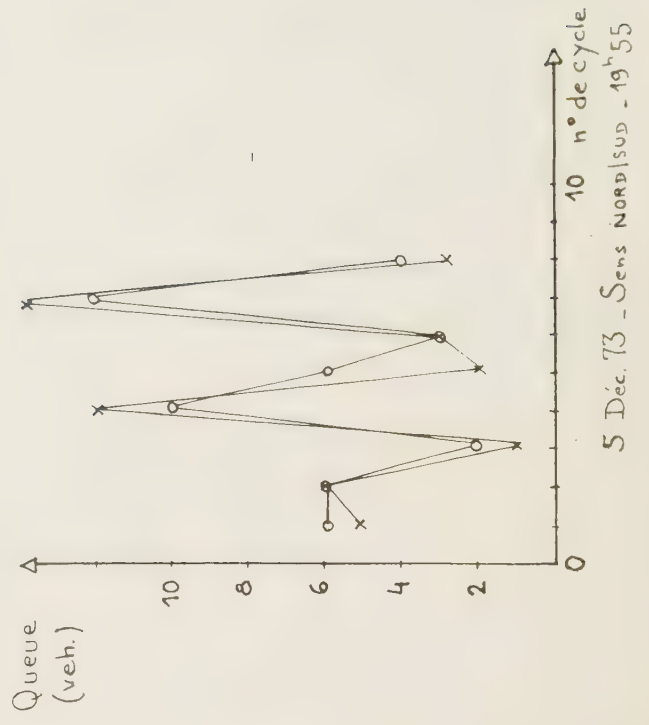
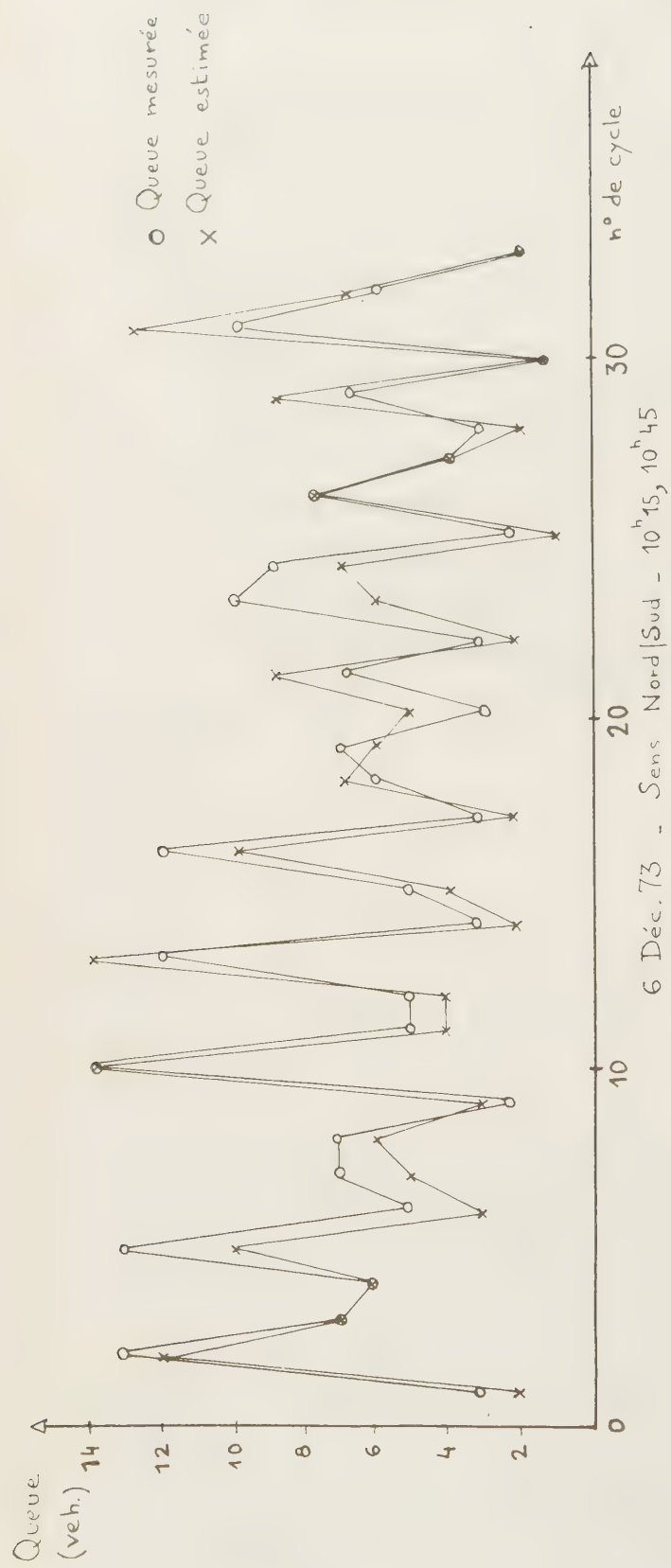
les résultats qui en découlent sont en concordance avec la réalité et ajuster certains paramètres de ces équations si cela s'avère nécessaire.

Le traitement des comptages et le calcul des longueurs de queue sont effectués par le mini-ordinateur parallèlement à des comptages manuels sur le site. La figure 2.13 montre l'évolution des longueurs de queue mesurées et calculées à différents moments de la journée.

L'examen de ces courbes et le calcul du coefficient de corrélation (0,90) montrent qu'il n'est pas utile d'essayer d'améliorer les équations de mesure ; en effet, diverses sources d'erreur existent au niveau des mesures comme au niveau du calcul ; elles sont :

- les erreurs commises sur l'appréciation visuelle des longueurs de queue (1 ou 2 veh).
- les erreurs dues à une répartition non uniforme et aléatoire des véhicules sur les différentes voies.
- les erreurs de calcul dues à l'ordinateur actuel qui effectue ses opérations en virgule fixe et donc tronque les résultats.
- les erreurs dues à la nature du matériel de comptage.

Nous conserverons donc dans la suite les équations de mesure décrites précédemment, sans modification de paramètres.



Chapitre 3

IMPLANTATION DES ALGORITHMES DANS LE SYSTEME INFORMATIQUE EXISTANT

Ce chapitre, consacré à l'implantation pratique des algorithmes de calcul dans le système existant, permet l'identification de certains paramètres des équations d'évolution grâce à des mesures effectuées sur site, décrit le traitement pratique des mesures en temps réel, l'organisation des tâches que devra effectuer le calculateur ainsi que l'application et la prise en compte des résultats du calcul.

3.1 - MESURES DIRECTES SUR LE SITE

Ce paragraphe comprend deux parties distinctes. La mesure directe sur le site des paramètres intervenant dans les équations d'évolution, tels que le débit de saturation et les temps perdus par cycle et l'exploitation d'informations a priori, constituées principalement de comptages de véhicules en aval des feux. Cette deuxième partie nous permettra d'avoir une idée de la charge du carrefour, en particulier aux heures de pointe.

A - Mesure des débits de saturation et des temps perdus

On sait que le nombre maximum de véhicules pouvant s'écouler pendant la phase verte V s'écrit :

$$n = s (V-L)$$

s désignant le débit de saturation de la voie considérée

L désignant la somme des temps perdus par les conducteurs (temps de réaction au vert)

Si on représente le débit réel de sortie du feu en fonction du temps, on obtient la courbe suivante :

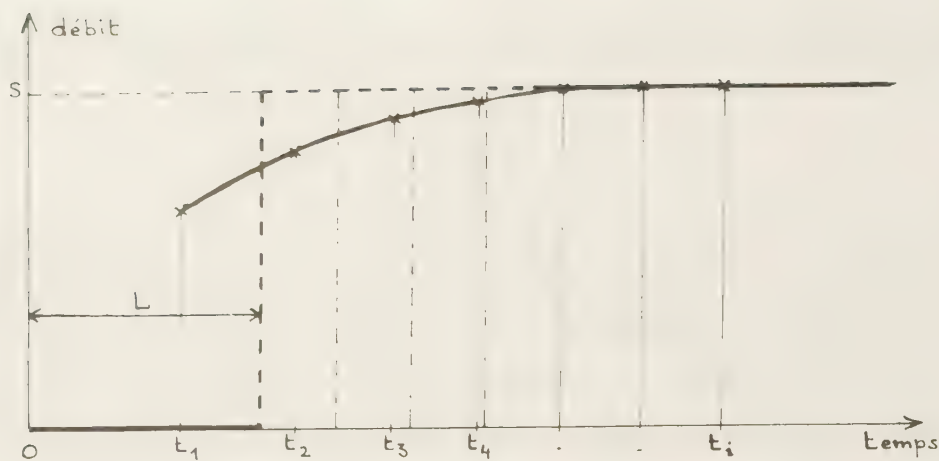


Fig. 2.14

où l'instant 0 est le début du vert,
 t_i est l'instant de passage du $i^{\text{ème}}$ véhicule,
et s le débit de saturation

On remarque que les véhicules s'écoulent au débit de saturation, sauf les premiers qui ont à tenir compte du temps de réaction t_1 du premier véhicule.

La mesure des intervalles de temps séparant deux véhicules nous permet donc de déterminer la valeur du débit de saturation.

La détermination des temps perdus suppose que le débit est constant et égal au débit de saturation pendant (Vert - L). La courbe ci-dessus nous permet donc de déterminer cette valeur (courbe pointillée).

Des mesures ont été effectuées les 25 et 26 juillet 1973 en période de pointe sur les deux voies d'accès du carrefour étudié. Ce dernier fonctionnait avec un cycle de 72 secondes, les verts ayant les valeurs suivantes :

Vert Alsace : 19 s
Vert Quais : 41 s

Mesures :

n° de cycle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
distance inter-véhicule (s)	2,1	2	3	1,9	2,2	2,5	2	1,8	2,5	3,2	2,6	2,6	2

Mesures (suite) :

n° de cycle	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
distance I,V (s)	2,5	2	2,8	3	2	2,4	2	2	2	2	2,4	3,4	2	2,5	2,8	2

Résultats des mesures :

Les mesures ont été effectuées sans aucune considération du type de véhicule (voiture particulière, camion). Le débit de saturation sera la moyenne des valeurs mesurées.

- Moyenne distance intervéhicule : $2,32 \text{ s} = t_{iV}$
Débit de saturation moyen $0,43 \text{ véh/s}$ soit 1550 véh/heure
- Nombre maximum de véhicules passant pendant le vert Alsace en période de saturation : $7,3 = n$
- Temps perdus par phase verte :
$$L = \text{Vert} + 1 \text{ s de jaune} - t_{iV} \times n = 3 \text{ s}$$

Les voies étant banalisées sur les deux approches, on a retenu les mêmes valeurs pour le sens NORD/SUD.

B - Informations a priori

Les seules informations que l'on possède sont des résultats de comptages effectués par les Services Techniques de la Communauté Urbaine au niveau des capteurs de mesure. Le tableau 2.15 regroupe quelques résultats pour les heures de pointe du matin, midi et soir et concerne les deux voies d'approche du carrefour étudié. L'examen de ce tableau montre que le trafic ne présente pas de grandes fluctuations au cours de la journée et nous permet d'avoir une idée du nombre maximum de véhicules desservis par le carrefour ; en particulier, il nous permettra de choisir une unité de débit telle que le fonctionnement des programmes en machine soit correct dans tous les cas (multiplication et division effectuées en virgule fixe).

La figure 2.16 représente aussi le résultat de comptages collectés toutes les 2 mn 30 automatiquement par l'ordinateur. Les courbes obtenues montrent les fluctuations importantes subies par le trafic, en particulier pour le sens NORD/SUD ; ceci est dû à la présence d'un carrefour voisin, qui libère les véhicules périodiquement (cycle de 100 s), et au pas d'échantillon-

Informations à priori.
Résultats de comptages.

Cours Alsace - Lorraine - 3 files.

Heure	5'	5'	5'
8 ^h 20	93	115	111
10 ^h 15	109	77	102
12 ^h	142	150	160
14 ^h 30	106	114	127
16 ^h 10	112	110	115
18 ^h 15	150	160	150

Sens Nord | Sud - 4 files.

Heure	5'	5'	5'
8 ^h 20	157	159	161
10 ^h 17	161	171	177
12 ^h	223	264	262
14 ^h 30	180	165	177
16 ^h 10	221	184	205
18 ^h 15	261	210	244

Tableau 2.15

Informations à priori.
 Résultats de comptages.

o - Sens Nord | Sud - 4 files.
 x - Cours Alsace-Lorraine - 3 files.

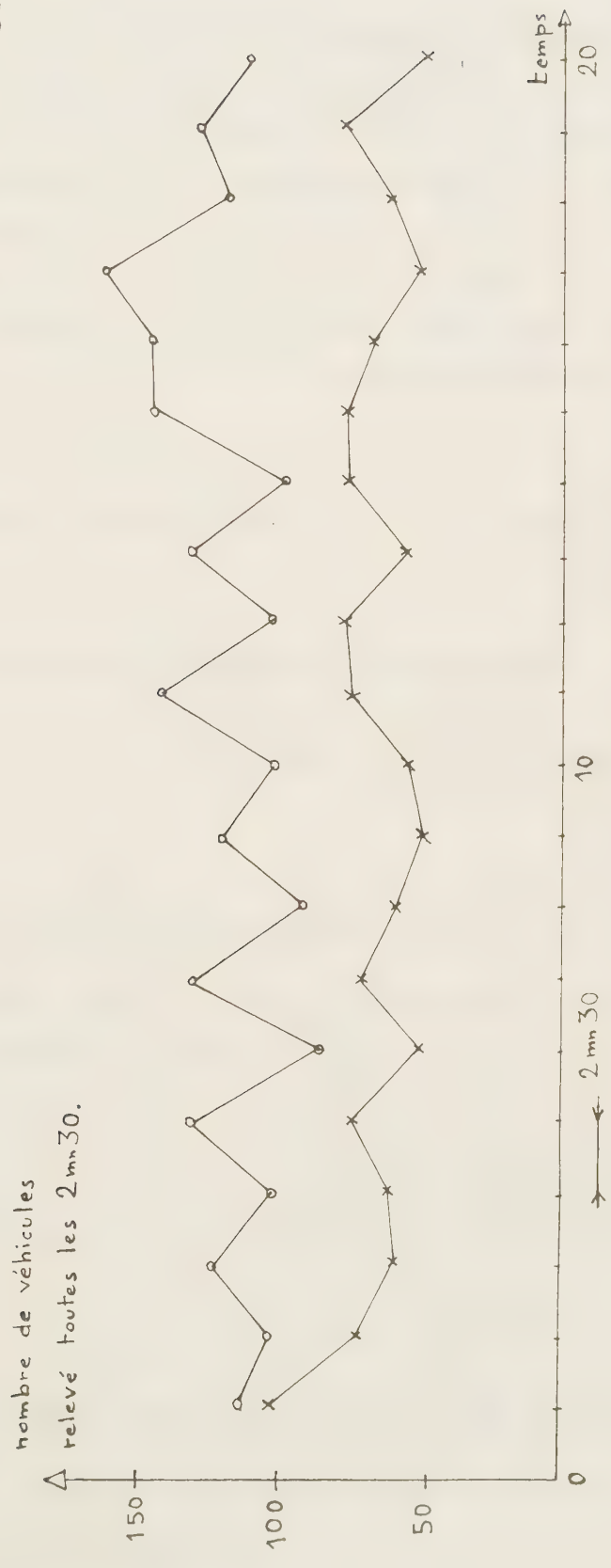


Fig. 2.16

nage régissant les comptages. Ce phénomène risque de se reproduire lors de la régulation malgré un pas d'échantillonnage différent, ce qui nous a incité (cf. 2.2) à estimer le débit d'arrivée sur un cycle en effectuant la moyenne des deux derniers débits mesurés.

3.2 - TRAITEMENT DES MESURES EN TEMPS REEL

Ce paragraphe décrit l'organisation du programme d'acquisition et de traitement des données en temps réel. On ne dispose en effet que des signaux délivrés par les boucles magnétiques lors du passage d'un véhicule.

On a vu au chapitre 2 que la mesure des longueurs de queues et l'estimation des débits d'arrivée nécessitaient la connaissance des résultats de comptages à des instants définis par la configuration des feux et par l'implantation des capteurs de mesure.

Il est alors nécessaire de disposer de deux sortes de compteurs ; des compteurs d'impulsions contenant le nombre de véhicules ayant traversé les capteurs et des compteurs de temps permettant la réinitialisation et la prise d'information.

- Initialisation et organisation des compteurs de temps

Reprenons le diagramme espace-temps du paragraphe 2.2 en y ajoutant le diagramme pour le Cours Alsace.

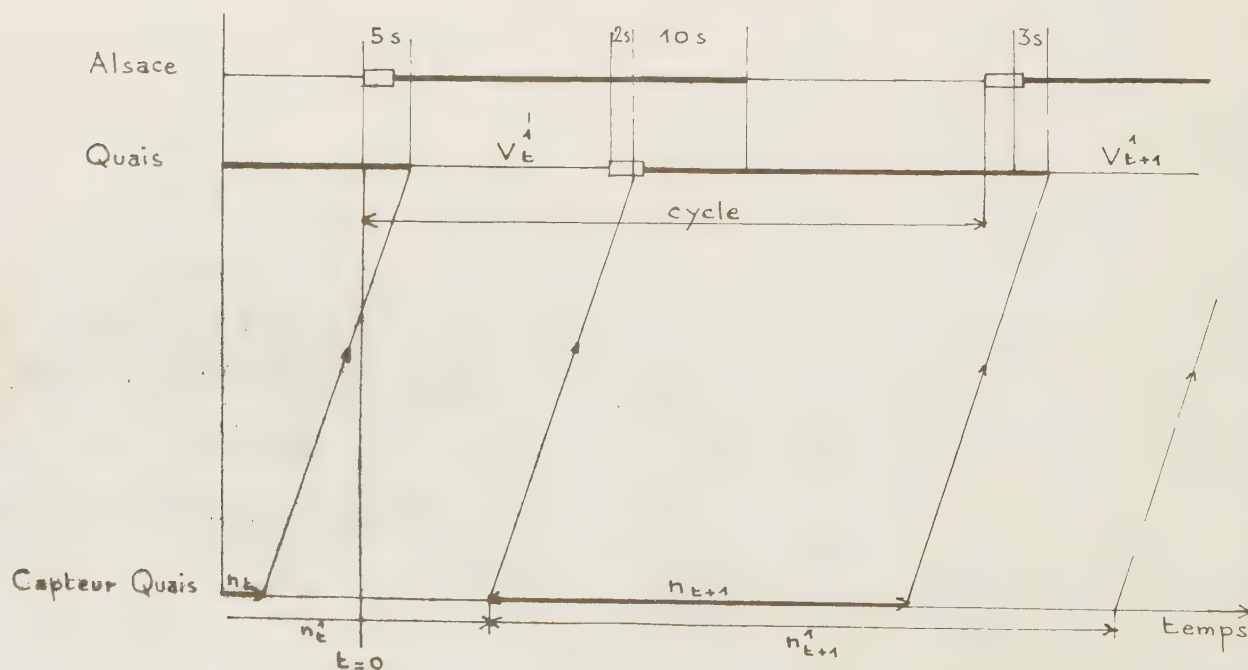


Fig. 2.17

On désire relever les contenus des compteurs d'impulsions n_t , n_t^1 , n_{t+1} , n_{t+1}^1 , etc... Lors de la mise en route du système à l'instant 0, on se trouve au début d'un cycle.

- La première mesure à relever aura lieu à l'instant : $Vl_t + 7 - T1$ où Vl_t est la valeur du vert Quais et $T1$ le temps de parcours du capteur au feu. A cet instant, on devra remettre à zéro le contenu des compteurs d'impulsions afin d'effectuer une nouvelle mesure de n_{t+1}^1 .
- La seconde mesure nécessaire sera faite à l'instant cycle + 5 - T1 ce qui correspond au relevé de n_{t+1} .

Ce raisonnement effectué sur la voie NORD/SUD est valable pour les comptages Alsace, ce qui donne le diagramme suivant, où l'on inclut dans les verts effectifs deux secondes de jaune.

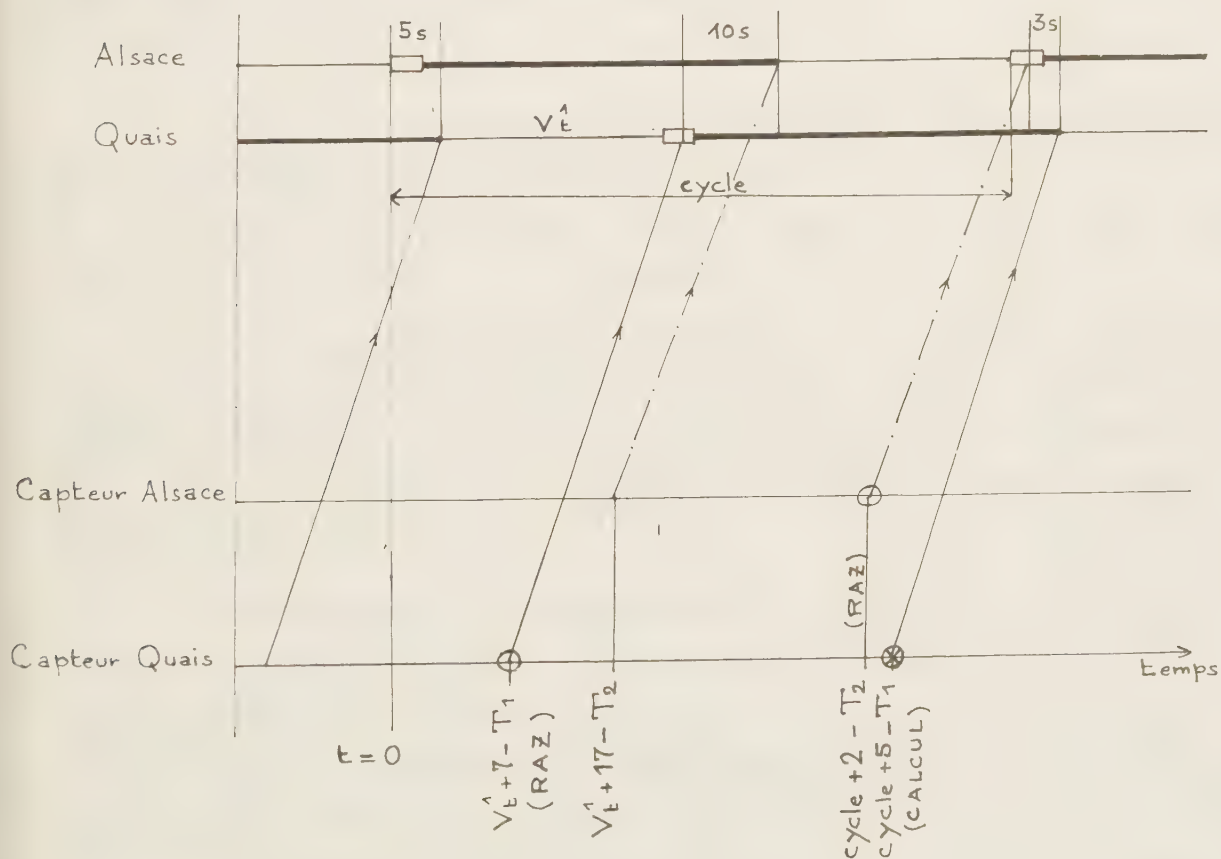


Fig. 2.18

RAZ signifie que l'on doit remettre à zéro les compteurs d'impulsions correspondants, et CALCUL permet le démarrage de la phase de calcul en vue d'obtenir le nouveau vert et le nouveau cycle à appliquer. Ceci étant fait, on doit réinitialiser les compteurs de temps compte tenu de ces nouvelles

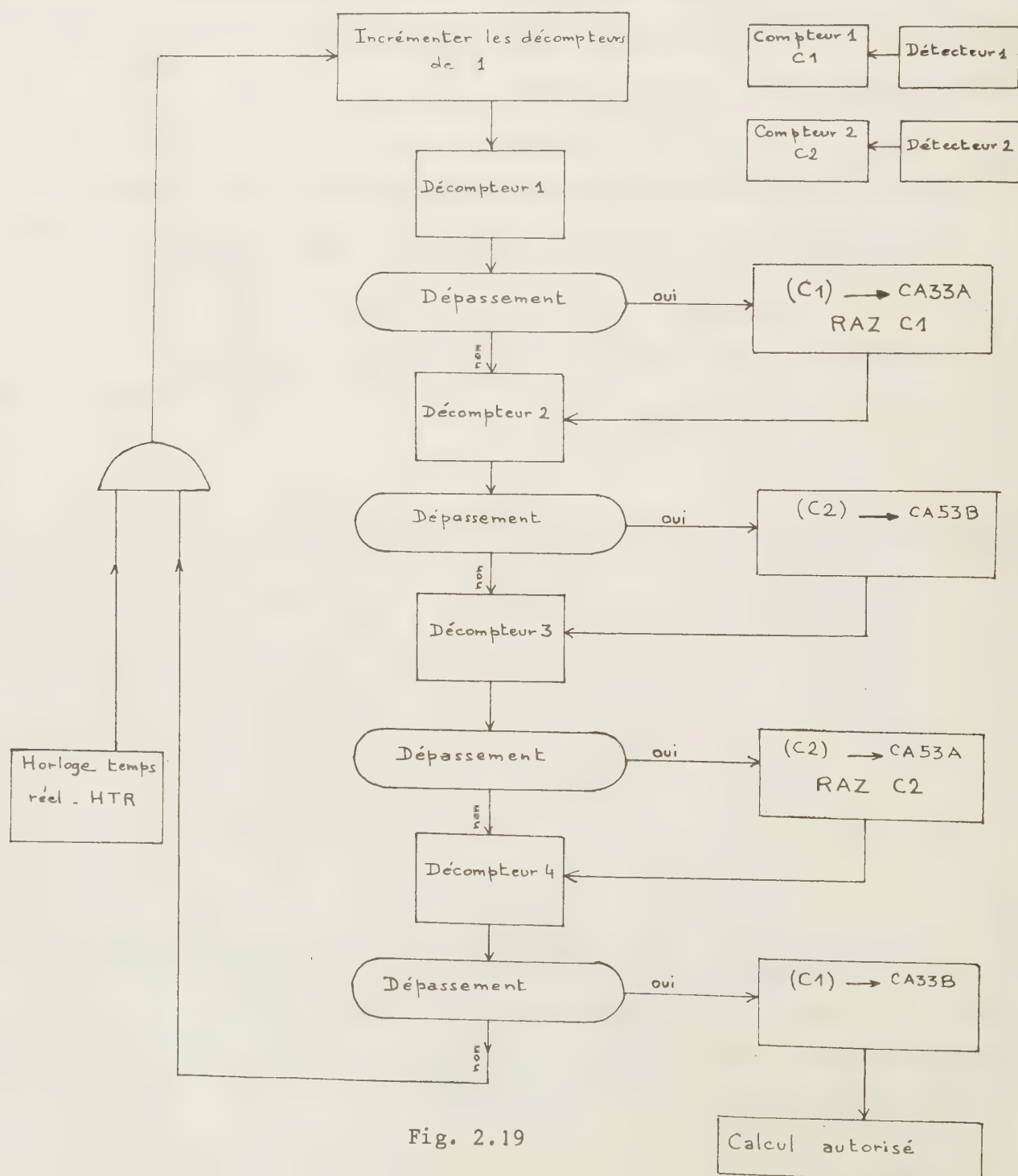
commandes, aux valeurs suivantes :

Compteurs Quais : 1^{ère} mesure : $\text{Vert} + 2 - T$ avec RAZ à cet instant
 2^{ème} mesure : $\text{Cycle} - T$

Compteurs Alsace: 1^{ère} mesure : $\text{Vert} + 12 + (T_1 - T_2) - T$
 2^{ème} mesure : $\text{Cycle} - 3 + (T_1 - T_2) - T$ avec RAZ à cet instant

où T_1 et T_2 sont les temps de parcours des capteurs au feu respectivement pour les sens NORD/SUD et le Cours Alsace-Lorraine, et T est le temps écoulé entre le début et la fin du calcul.

- Organigramme du traitement des informations



Ce programme est traité toutes les secondes grâce à l'horloge temps réel (HTR) et permet le relevé des résultats des comptages contenus dans (C1) et (C2).

Les décompteurs de temps contiennent, en cours de fonctionnement, les valeurs :

Décompteur 1	Décompteur 2	Décompteur 3	Décompteur 4
$\text{Vert} + 2 - T$	$< \text{Vert} + 12 + (T1-T2) - T$	$< \text{Cycle} + (T1-T2) - 3-T$	$< \text{Cycle} - T$

Les cellules mémoire CA 33 A, CA 33 B, CA 53 A, CA 53 B contiennent respectivement les valeurs n_t^1 , n_{t+1} pour le sens NORD/SUD et n_t^1 , n_{t+1} pour le Cours Alsace.

Le calcul des débits d'arrivée et des longueurs de queue est autorisé à la fin du cycle.

3.3 - ORGANISATION DES TÂCHES ET COMMANDE DES FEUX

Le calculateur a essentiellement deux rôles :

1°) Un rôle de traitement de l'information, c'est-à-dire la recherche de la stratégie optimale à adopter en fonction des mesures effectuées sur site.

2°) Un rôle de commande des feux, c'est-à-dire la gestion du déroulement des phases à l'intérieur d'un cycle.

Le traitement de l'information comprend le programme d'acquisition de données précédemment décrit, effectué toutes les secondes, le programme de calcul des longueurs de queue et de débits d'arrivée, le programme de calcul des commandes optimales et de vérification des contraintes et le programme de réinitialisation.

L'impression des compte-rendus sur le télétype a lieu toutes les 2 mn 30 et fournit les longueurs de queue, les débits probables d'arrivée et les commandes qui en découlent.

Il faut noter que le traitement en temps réel des données est prioritaire sur les autres tâches (calcul, impression).

La commande proprement dite des feux est faite phase par phase à l'aide de trois tables contenant chacune les temps de cycle, de vert, ainsi que les temps de sécurité.

table 1

- Cycle
Phases spéciales
- Vert
Autres phases

table 2

- Cycle
Phases spéciales
- Vert
Autres phases

table 3

- Cycle .
Phases spéciales
- Vert
Autres phases

- La table 1 est la table de commande en cours d'exécution ; son contenu est incrémenté de 1 à chaque interruption d'horloge. Le passage par zéro d'une des cellules de cette table active une routine de commande des feux.

- La table 2 reçoit les résultats du calcul (politique à adopter au cycle suivant)

- La table 3 est une table de sécurité contenant des valeurs fixes de cycle et de vert et permet le fonctionnement des feux même en cas de défaillance de la partie calcul.

3.4 - FONCTIONNEMENT EN LIGNE

La mise en ligne du système de commande a eu lieu les 4, 5 et 6 décembre 1973 à diverses heures de la journée et de la nuit. On ne présente ici que les résultats significatifs, c'est-à-dire ceux obtenus à des heures proches des périodes de pointe du midi et du soir, le fonctionnement du système dans la nuit du 5 au 6 décembre ne présentant pas d'intérêt vu le niveau faible du trafic.

Les premières courbes (fig. 2.20, 2.21) représentent l'évolution des longueurs de queue en fin de rouge pour les deux voies du carrefour considéré, exprimées en véhicules par voie, des débits d'arrivée estimés (en véhicules par quart d'heure), et les commandes vert et cycle qui en résultent. On a noté par C le fait que le vert atteint sa contrainte haute, c'est-à-dire la valeur (cycle - 40).

Application sur site - 4-12-73

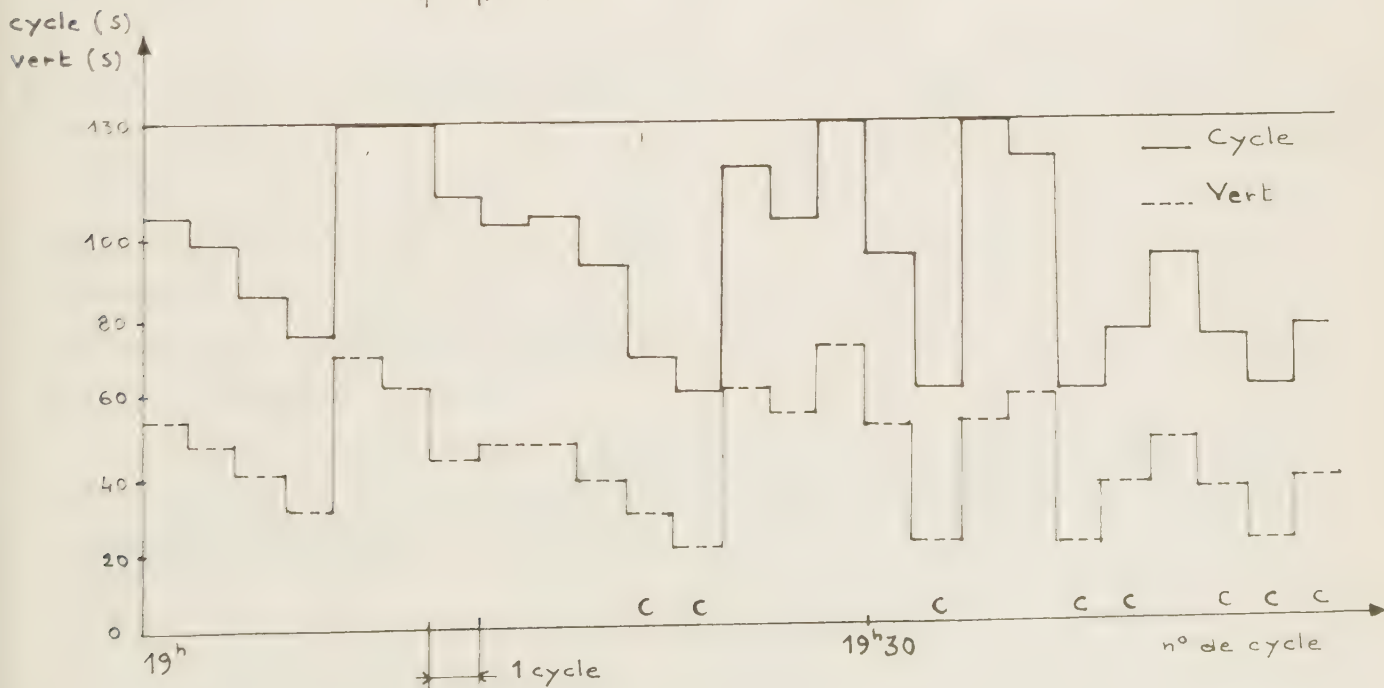
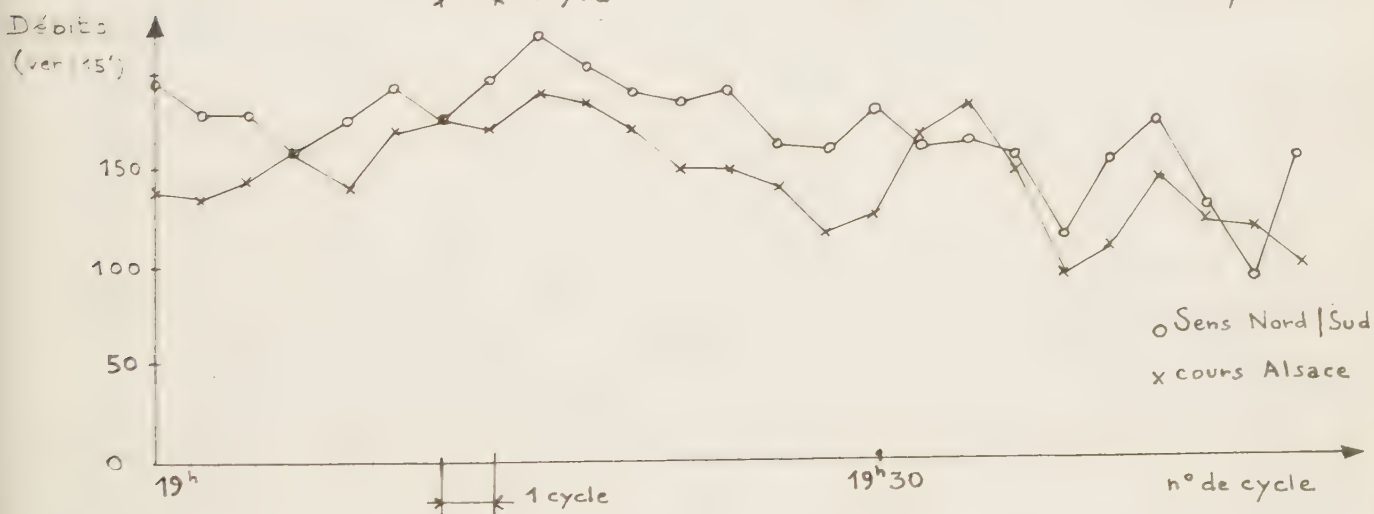
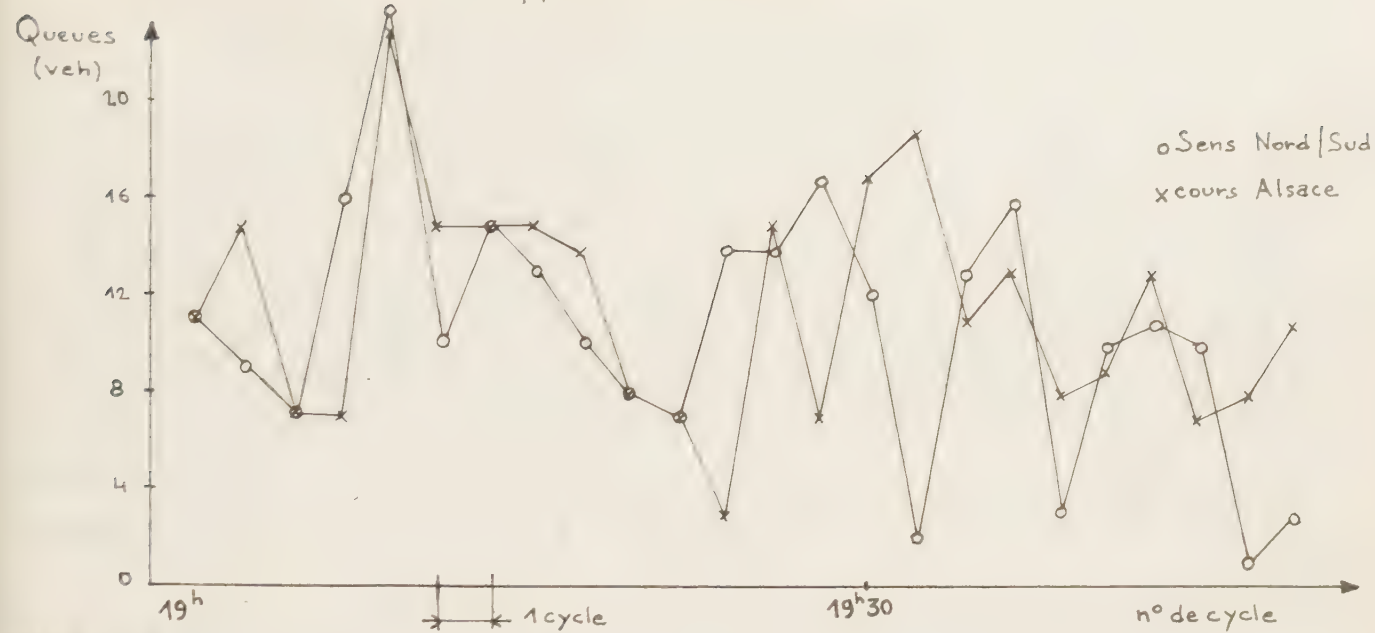


Fig. 2.20

Application sur site - 5-12-73

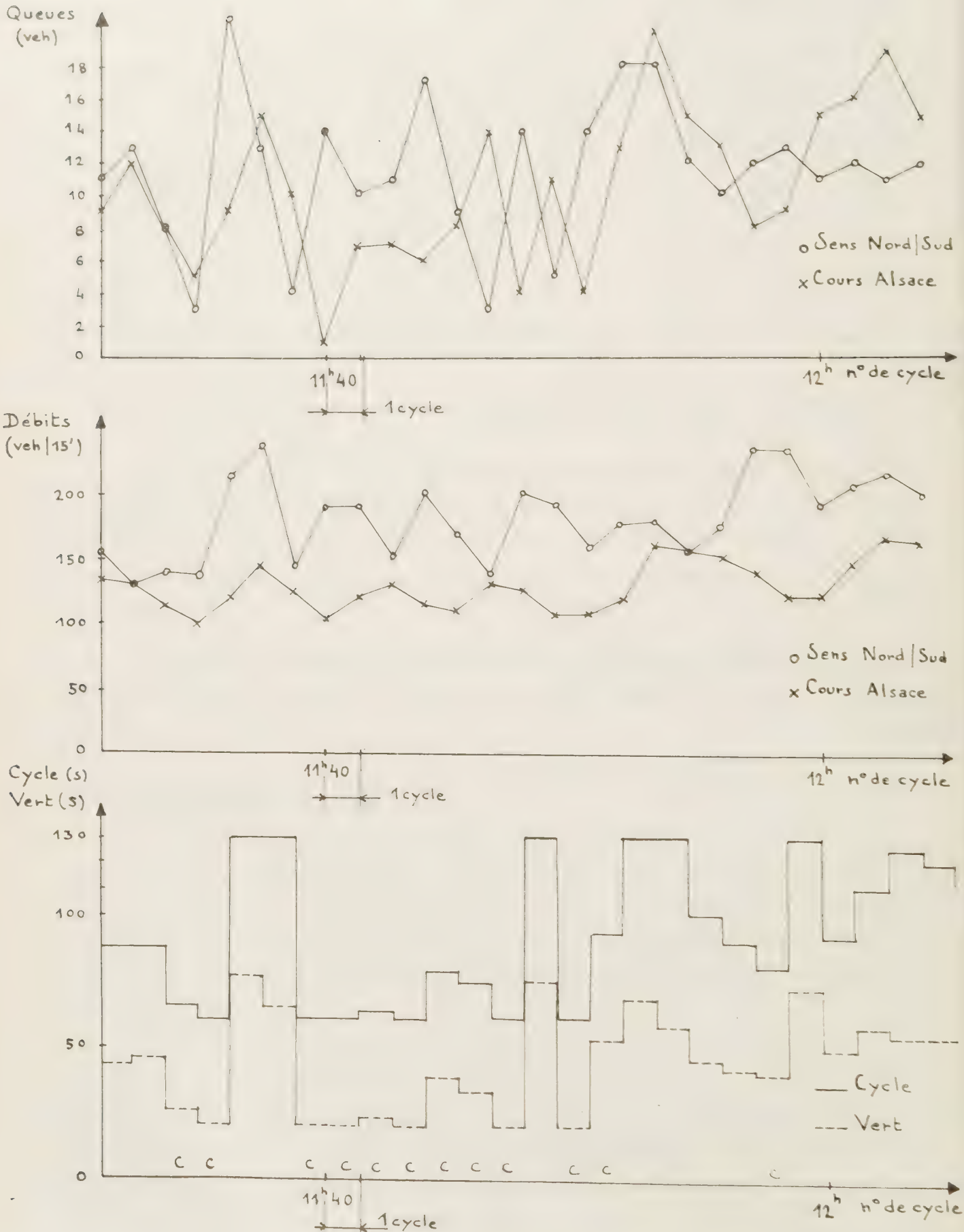


Fig. 2.21

L'examen de ces courbes montre que :

- La répartition du trafic sur les deux voies est telle que la durée de vert se trouve souvent en contrainte.

- Pour certaines périodes de temps (par exemple 19 h 10 - 19 h 25), les longueurs de queue sont égales à 1 ou 2 véhicules près, ce qui suppose a posteriori une estimation correcte des débits d'arrivée.

- Le degré de saturation des deux voies (ordre de grandeur des longueurs de queue) est néanmoins identique.

- Les variations de cycle peuvent être très importantes (passage d'un cycle de 60 s à un cycle de 130 s et inversement).

Dans la plupart des régulations actuelles, le calcul de la durée de cycle est soumis à une contrainte supplémentaire : dès la détection d'un changement de cycle, on attend généralement une confirmation avant l'application de la nouvelle valeur, ce qui évite certaines oscillations intempestives dues aux variations accidentelles du trafic.

On a donc introduit dans notre système une contrainte supplémentaire limitant les variations du cycle à 20 %. Les figures 2.22 et 2.23 montrent les résultats de cette nouvelle application sur site pour des heures significatives de la journée. Les remarques sont sensiblement les mêmes que précédemment avec cependant des durées de vert moins souvent en contrainte.

Cependant, l'application de cette régulation au carrefour particulier étudié s'est avérée difficile en période de congestion (heure de pointe de midi). Cette restriction est essentiellement due aux conditions particulières d'application et surtout à l'environnement du carrefour ; en effet, le fonctionnement de ce dernier dépend, surtout en période de pointe, des carrefours avoisinants (fonctionnant à cycle fixe) ; il ne peut donc plus être considéré comme isolé. Il arrive alors fréquemment, à cause des valeurs du cycle, que les carrefours fonctionnent en opposition de phase, ce qui entraîne des perturbations importantes sur l'axe.

Cette difficulté peut être facilement levée en maintenant le carrefour étudié dans la coordination générale de l'ensemble, c'est-à-dire en appliquant une politique de commande à cycle fixe (1ère partie, chap. 3).

Application sur site - 6-12-73

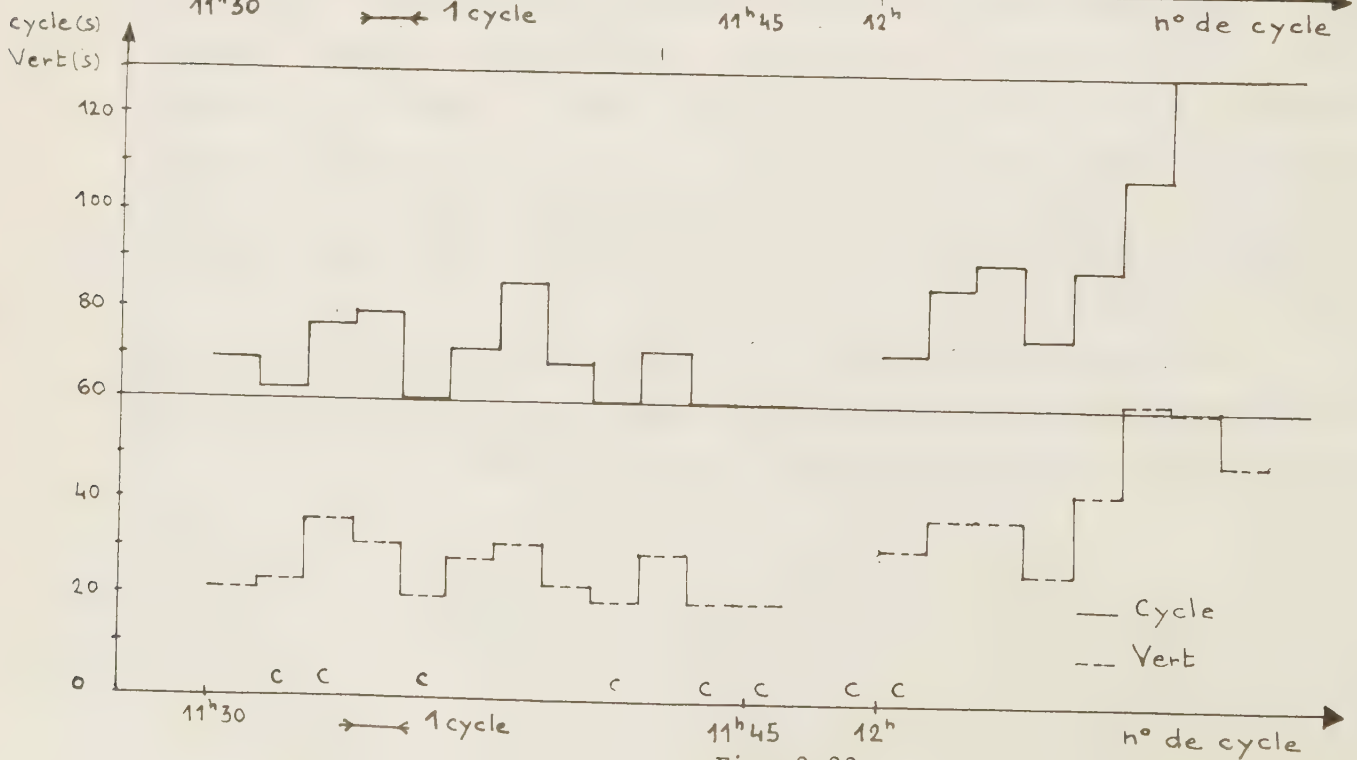
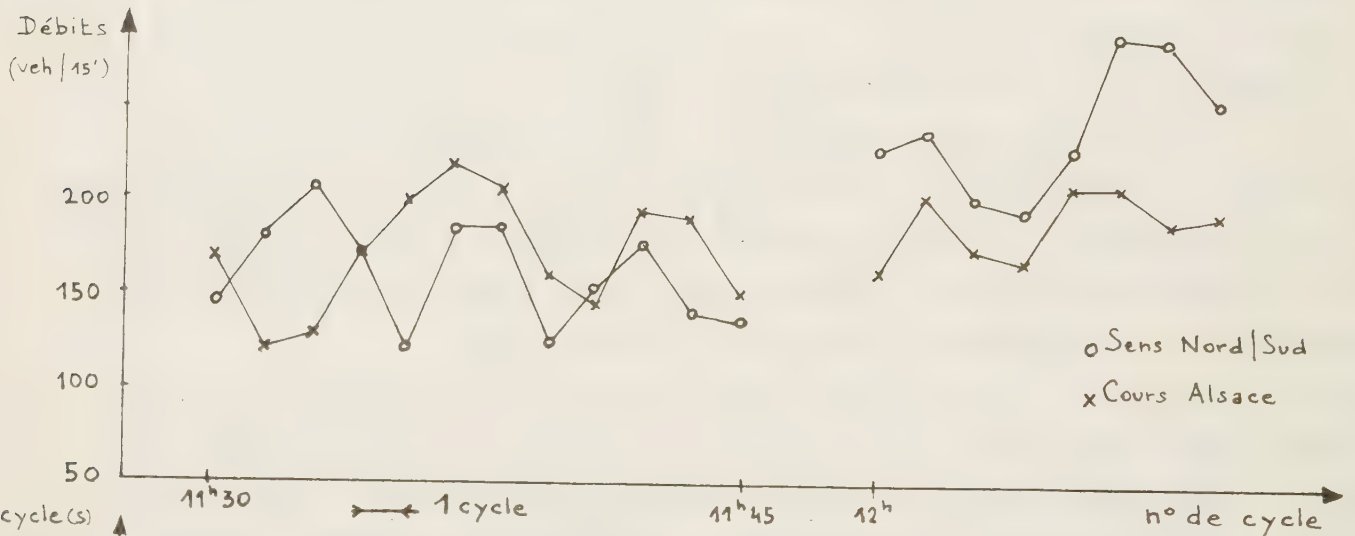
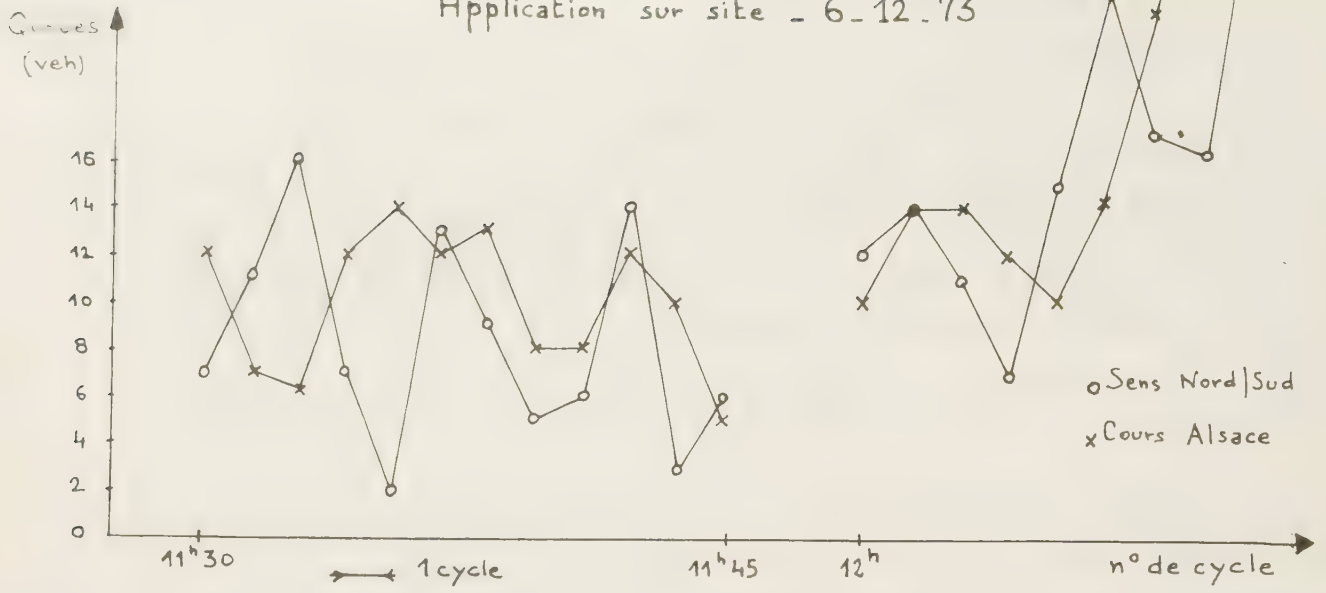


Fig. 2.22

Application sur site . 6-12-73.

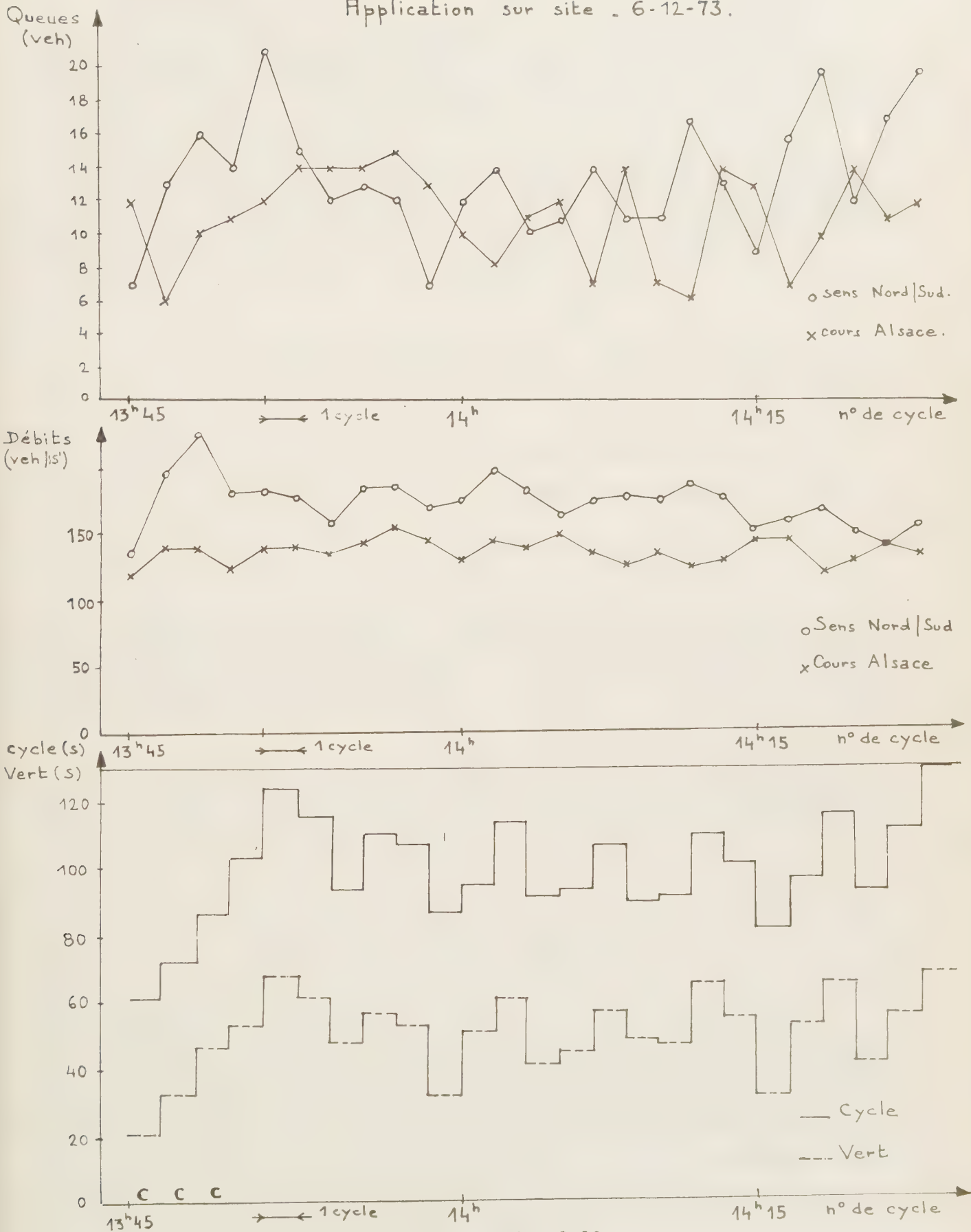


Fig. 2.23

3.5 - INFLUENCE DES ERREURS DE MESURE

Quelques remarques sur la sensibilité de cette régulation par rapport aux grandeurs mesurées ou estimées vont nous permettre d'expliquer les différences existant entre l'évolution du système réel et du système simulé.

Rappelons quelques résultats obtenus en simulation : en saturation, l'application du vert optimal tend à rendre égales les longueurs de queues sur les deux voies.

Ce vert optimal a pour expression :

$$V = \frac{C}{2} + 1,06 (Q_1 - Q_2) + 0,6 C (\alpha - \beta) - 6$$

où Q_1 et Q_2 sont les longueurs de queues exprimées en véhicules.

α et β sont les débits probables d'arrivée en véh./s.

c est la longueur du cycle

Les équations d'états sont :

$$Q_{t+1}^1 = Q_t^1 + \alpha C - s (V - L)$$

$$Q_{t+1}^2 = Q_t^2 + \beta C - s (C - V - L - 2a)$$

Les mesures de longueurs de queues et les estimations des débits d'arrivée étant entachées d'erreurs, nous allons calculer l'influence des erreurs de mesure sur la commande optimale et sur l'évolution prévue des longueurs de queue.

Sensibilité de la commande optimale

Les coefficients de sensibilité du vert V par rapport aux deux couples de grandeurs mesurées (Q_1 , Q_2) et (α , β) sont :

$$\frac{\partial V}{\partial Q_1} = - \frac{\partial V}{\partial Q_2} = 1,06$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = - \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0,6 c$$

Cela signifie qu'une erreur de mesure de 1 véhicule sur la longueur de queue Q_1 ou Q_2 entraîne une erreur de 1 seconde sur la valeur du vert par rapport à la valeur optimale. Une erreur de 90 véh/15' sur l'estimation du débit entraîne une erreur de 8 s pour le vert optimal, dans le cas le plus défavorable (cycle de 130 s).

Sensibilité des états

Compte tenu des équations d'état ci-dessus, la sensibilité des états résultants vis-à-vis d'erreurs de mesure s'exprime par les coefficients :

$$\frac{\partial Q_t^1}{\partial V} = - \frac{\partial Q_t^2}{\partial V} = s$$

Dans le cas précédemment étudié où le débit de saturation vaut 0,5 véh/s, les erreurs deviennent :

$$\begin{aligned} - \text{ si } \Delta Q_t^1 = 2 \text{ véh} & \Rightarrow \Delta V = 2 \text{ s} \Rightarrow \Delta Q_t^1 = 1 \text{ véh} \\ & \Delta Q_t^2 = - 1 \text{ véh} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{ si } \Delta \alpha = 90 \text{ véh/15'} & \Rightarrow \Delta V = 8 \text{ s} \Rightarrow \Delta Q_t^1 = 4 \text{ véh.} \\ & \Delta Q_t^2 = - 4 \text{ véh.} \end{aligned}$$

Ces exemples nous montrent les variations relativement importantes affectant les trajectoires en cas d'erreurs de mesure sur les longueurs de queue et sur les débits, ce qui explique le chevauchement des courbes les unes sur les autres.

La précision des mesures de longueurs de queue étant acceptable (1 à 2 véhicules dans la majorité des cas), il est normal d'imputer ce chevauchement des trajectoires à l'estimation des débits d'arrivée.

Reprenons, en effet, l'enregistrement de la figure 2.23 et traçons fig. 2.24, l'évolution des débits estimés et des débits réels, ceci étant réalisable grâce à l'équation d'estimation initialisée à partir d'un point supposé exact. On a également représenté sur ces figures l'évolution des écarts entre les deux courbes ci-dessus.

On constate qu'il est justifié de considérer l'écart entre débit réel et débit estimé comme une variable aléatoire de moyenne nulle ; ceci confirme a posteriori les hypothèses émises dans la 1ère partie (2.2) et signifie que la régulation est valable en moyenne sur un laps de temps assez grand.

Ces écarts devraient s'atténuer si le carrefour était maintenu dans la coordination générale du réseau (cycle fixe) ou s'il était effectivement isolé.

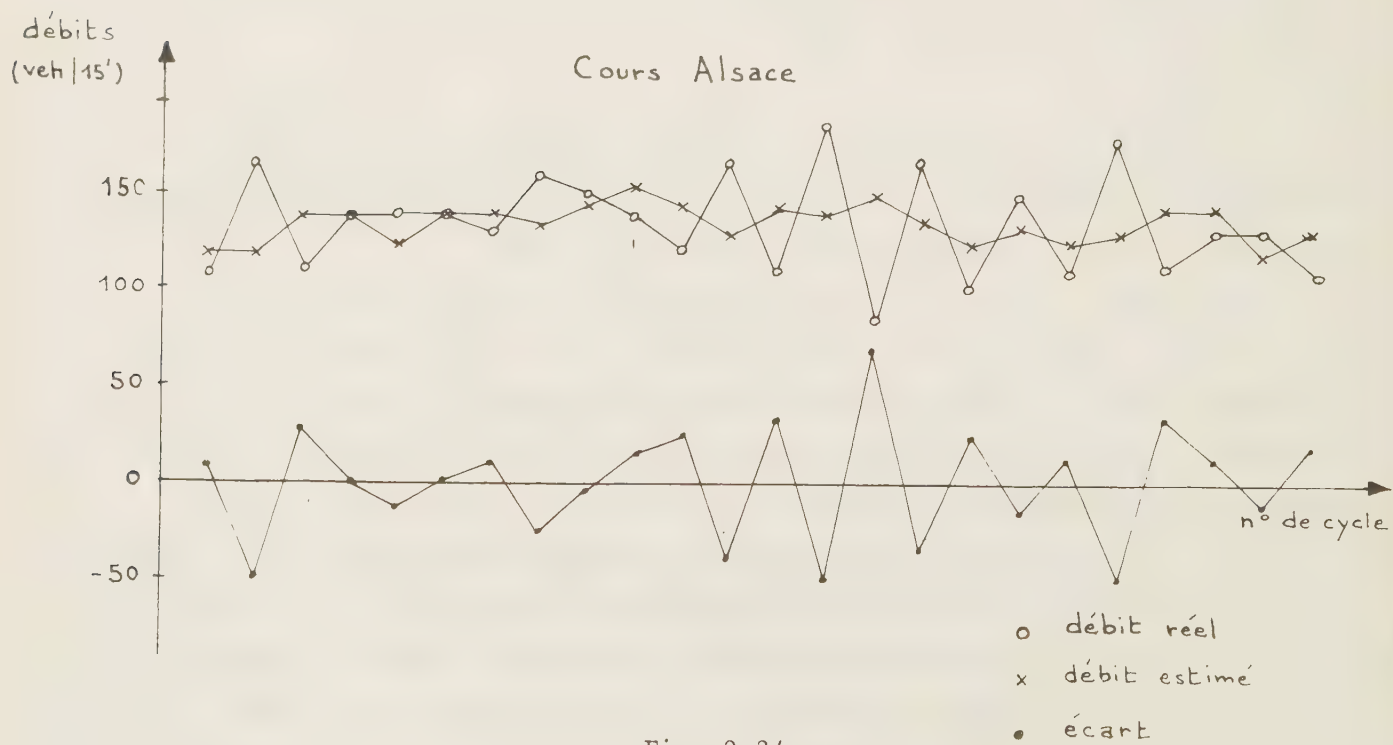
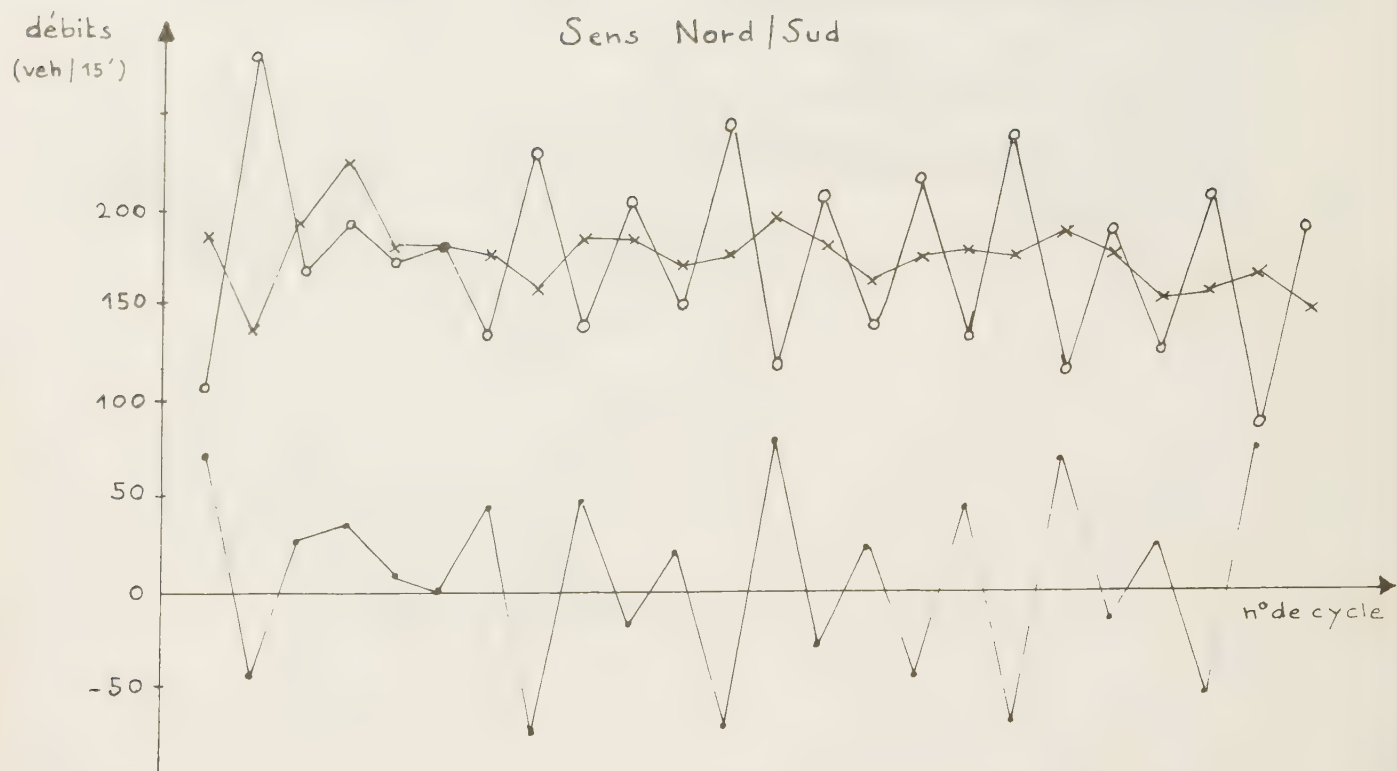


Fig. 2.24

Conclusion :

L'application des algorithmes de commande développés dans la première partie a été réalisée sur un carrefour à deux branches comportant chacune quatre voies d'accès. Nous l'avons entreprise grâce aux deux étapes suivantes :

L'identification préalable des coefficients intervenant dans les équations d'état (débits de saturation, temps perdus) peut être faite simplement grâce à des mesures manuelles des temps de passage des véhicules au niveau des feux ; elle aboutit au calcul hors ligne des coefficients permettant d'obtenir une commande en boucle fermée sur les longueurs de queues et sur les débits probables d'arrivée.

L'implantation des algorithmes de calcul dans le système informatique devient alors relativement simple à réaliser, ce qui permet, à l'aide de la méthode de mesure des longueurs de queues exposée au chapitre 2, un calcul rapide des deux grandeurs de commande (vert et cycle).

Le fonctionnement en ligne du système de commande proposé pendant quelques jours et l'observation des résultats obtenus nous autorisent à conclure que, compte tenu des hypothèses émises dans la première partie sur les débits d'arrivée (assimilables à leur valeur moyenne sur un cycle), des erreurs de mesure et d'estimation inévitables et des conditions particulières d'application, ce nouveau système de commande des feux en temps réel donne des résultats intéressants et prometteurs ; en effet :

- Contrairement aux systèmes de commande en boucle ouverte ou en boucle fermée simple, la structure en boucle fermée prédictive, - c'est-à-dire avec modèle - de la commande permet de faire face immédiatement aux fluctuations aléatoires du trafic, compte tenu de prévisions à court terme sur les débits d'arrivée.

- La souplesse d'emploi du système de commande proposé réside essentiellement dans le fait que les performances statiques et dynamiques de l'ensemble régulé restent à la disposition de l'utilisateur (il pourra, par exemple, favoriser une voie par rapport aux autres) ; dans notre application, on a décidé que les deux voies du carrefour étaient d'importance égale ; on observe bien sur les courbes obtenues que les longueurs de queues sont du même ordre de grandeur.

- Le calcul des commandes (vert et cycle) s'effectue à la fin de chaque cycle, ce qui donne au système un caractère vraiment temps réel et permet un contrôle continu de la circulation.

BIBLIOGRAPHIE

|1| DOMENECH PUIG-SERRA

"Analyse des capteurs inductifs du trafic. Application à la détection des variables caractérisant le trafic urbain"

Thèse de Docteur-Ingénieur - Toulouse - Juin 1972.

|2| R. BÖTTGER

"Etude en simulation d'un dispositif de détection de la longueur des files de véhicules et des retards"

1er Symposium IFAC-IFIP - Versailles 1970.

|3| ALTMAN, PIGNATARO, YAGODA

"The design of automatic surveillance systems for urban free ways"

Transp. Res. Vol. 2, pp. 347-361 - 1968.

Troisième Partie

COMMANDE EN LIGNE DES FEUX D'UN RESEAU

Cette troisième partie comprend l'étude théorique et la simulation de la commande en ligne des feux d'un axe de circulation, réalisées dans la même optique que la commande des feux d'un carrefour, c'est-à-dire aboutissant à une commande optimale prédictive en boucle fermée (avec modèle mathématique). On s'est notamment intéressé aux problèmes pratiques que poserait une implantation en ligne en proposant successivement une méthode de commande sous-optimale susceptible de résoudre certaines difficultés de calcul, une structure hiérarchisée au niveau du fonctionnement des algorithmes sur calculateur.

La recherche des modèles mathématiques, c'est-à-dire la détermination d'équations liant les longueurs de queue, les commandes et les perturbations conduit à de nombreuses non-linéarités difficilement utilisables pour établir une commande en ligne. Cependant, et ainsi que l'automaticien le fait chaque fois que son but est la régulation, un modèle linéarisé a pu être établi. La commande s'obtient alors en deux phases :

- une optimisation statique visant à rechercher le point de fonctionnement,
- une optimisation dynamique, avec coût quadratique permettant une régulation dynamique autour de ce point de fonctionnement.

Avant d'examiner les hypothèses qui nous ont permis de développer ces méthodes, et qui ont été obtenues à l'aide d'une analyse hors ligne effectuée sur les modèles non linéaires, il est bon de rappeler celles qui sont à la base des méthodes classiques de coordination.

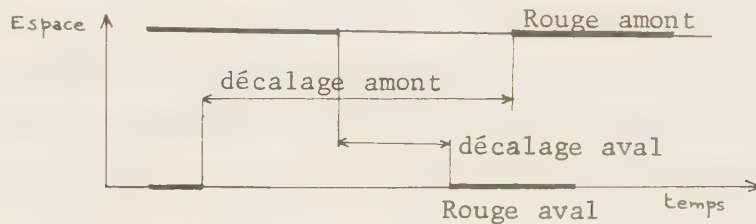
Il existe actuellement un nombre important de méthodes de coordination de réseaux routiers, depuis les méthodes en boucle ouverte jusqu'aux méthodes de calcul en temps réel des éléments de régulation. Il n'y a cependant aucune unité entre ces diverses procédures ; elles emploient, en effet, des modèles, des critères très divers et l'obtention des éléments de régulation peut être très simple ou très compliquée. En revanche, elles supposent toutes que la durée de cycle est commune à tous les carrefours et que la répartition de ce cycle en phases est connue à priori, les décalages de coordination restant les seuls éléments disponibles.

On a jugé, dans ce travail, qu'il était souhaitable de se débarrasser de ces hypothèses habituelles, quitte à en rétablir une partie et d'analyser en détail le fonctionnement macroscopique d'un réseau.

Avant de passer à l'étude théorique d'un réseau, il est bon de donner quelques définitions ; on appelle :

Chaînon : portion de route, à un ou deux sens de circulation, comprise entre deux carrefours.

Décalages : la différence de temps entre la fin du rouge d'un carrefour et le début du rouge du carrefour le plus proche.



Axe ou réseau : ensemble de chaînons.

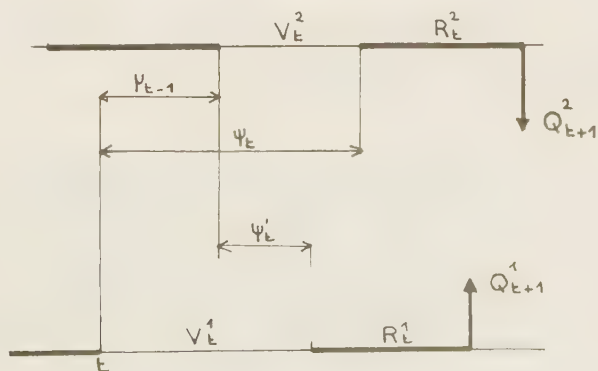
Les grandeurs de commande d'un chaînon sont, à priori, au nombre de quatre : décalages amont ou aval, longueurs des rouges des carrefours amont ou aval.

L'état d'un chaînon sera représenté, comme dans le cas d'un carrefour, par l'ensemble des longueurs de queue en fin de rouge.

Les perturbations seront les débits d'entrée du chaînon ou du réseau.

Muni de ces définitions, nous sommes alors capables de franchir la première étape dans la recherche d'une commande optimale qui est l'établissement de modèles mathématiques.

Rechercher un modèle de chaînon consiste à établir des équations liant les états (longueurs de queue en fin de rouge) aux commandes (décalages, rouges) et aux perturbations (débits d'arrivée) ;



Une étude systématique proposée en annexe, a permis de déterminer les courbes représentant l'évolution des longueurs de queue Q_{t+1}^1 et Q_{t+1}^2 d'un chaînon

en fonction des commandes ($\psi_t, \psi'_t, R_t^1, R_t^2$), des débits d'arrivée (α, β) et des caractéristiques du chaînon (temps de parcours libre τ_0, τ'_0 , débits de saturation). Ces courbes sont linéaires par morceaux et on a dénombré pour chaque longueur de queue (Q_{t+1}^2 ou Q_{t+1}^1) une dizaine d'équations différentes, ce qui rend l'exploitation de ces modèles difficile.

On propose cependant en annexe la recherche des commandes qui minimisent l'ensemble des longueurs de queue présentes dans le chaînon. Le nombre élevé d'équations régissant le fonctionnement de ce chaînon et le nombre important de cas de figure à examiner nous ont obligés à effectuer cette étude hors ligne.

La conclusion essentielle de cette optimisation statique est que le minimum du critère (somme de toutes les longueurs de queue) est obtenu pour les valeurs suivantes des commandes :

$$\begin{aligned} \psi_t + R_t^2 &= \tau_0 + \psi'_t + R_t^1 \\ \psi'_t + R_t^1 &= \tau'_0 \end{aligned}$$

et τ_0 et τ'_0 sont les temps de parcours libre pour les deux sens de circulation.

On en déduit facilement que, en régime permanent, le cycle est commun aux deux carrefours; sa valeur optimale est :

$$C^* = \tau_0 + \tau'_0$$

et que les décalages classiques optimaux sont respectivement τ_0 et τ'_0 . Ces résultats, valables quels que soient les débits d'arrivée α et β n'entraînant pas la saturation, ne concernent donc que les décalages et les cycles. Les durées de vert, elles, dépendent de ces deux perturbations α et β et seront calculées dans le chapitre suivant.

En définitive, les hypothèses qui nous serviront à élaborer une commande en ligne sont (cf Annexe 1) :

- la durée de cycle est commune à tous les carrefours
- sa valeur optimale est déterminée grâce à la mesure des temps de parcours sur chaînon pilote
- les décalages de coordination sont connus et leur valeur dépend de cette même mesure.

Le premier chapitre est consacré à la recherche d'un modèle linéaire de réseau. Les hypothèses de départ, qui sont les résultats obtenues par l'optimisation statique brièvement exposée ci-dessus, nous permettent d'élaborer un modèle mathématique linéaire, dynamique d'un réseau. Son exploitation conduit, grâce aux méthodes d'optimisation quadratique, à une politique de commande en boucle fermée fournissant les durées de vert optimales en fonction des longueurs de queue.

L'application en simulation de ce type de commande constitue l'essentiel du chapitre 2. On y traite le cas d'un réseau constitué de quatre carrefours en ligne soumis à des perturbations sur les débits d'arrivée. On y démontre notamment que cette méthode est relativement souple à employer et constitue donc un outil puissant pour la régulation de réseaux.

Dans le chapitre 3, on propose une marche à suivre pour une implantation en ligne sur calculateur. On s'attache notamment à réduire le nombre de calculs à effectuer en ligne (commande sous-optimale) et à procéder à une hiérarchisation des algorithmes de commande au niveau de l'implantation en machine (structure hiérarchisée de commande), ce qui rend le fonctionnement du système très sûr, même en cas de défaillance des éléments de mesure.

Chapitre 1

MODELE LINEAIRE DE RESEAUX

L'optimisation du fonctionnement d'un chaînon, avec modèle non linéaire, fournit des indications sur les valeurs optimales du cycle et des décalages de coordination (cf. Annexe 1) ; ces indications sont maintenant considérées comme des hypothèses de départ pour engendrer une commande optimale réalisable en ligne.

Rappelons ces hypothèses :

- Tous les carrefours de l'axe ont un cycle commun dont la valeur dépend du temps mis par les véhicules pour traverser un chaînon pilote.

- Il existe une relation linéaire entre les décalages et les valeurs du rouge du type (cf. fig. 3.1) :

$$\psi'_t + R_t^1 = \tau'_0$$

$$\psi_t + R_t^2 = \tau_0 + V_t^1 + R_t^1$$

Les deux grandeurs de commande restant à notre disposition pour réguler un chaînon sont alors les grandeurs ψ_t et ψ'_t , soit encore les répartitions du cycle en phases.

Nous établirons d'abord un modèle linéaire de chaînon que nous étendrons ensuite à un réseau complet.

1.1 - ETABLISSEMENT D'UN MODELE LINEAIRE DE CHAINON

Le diagramme espace-temps du fonctionnement de deux carrefours en ligne est rappelé fig. 3.1.

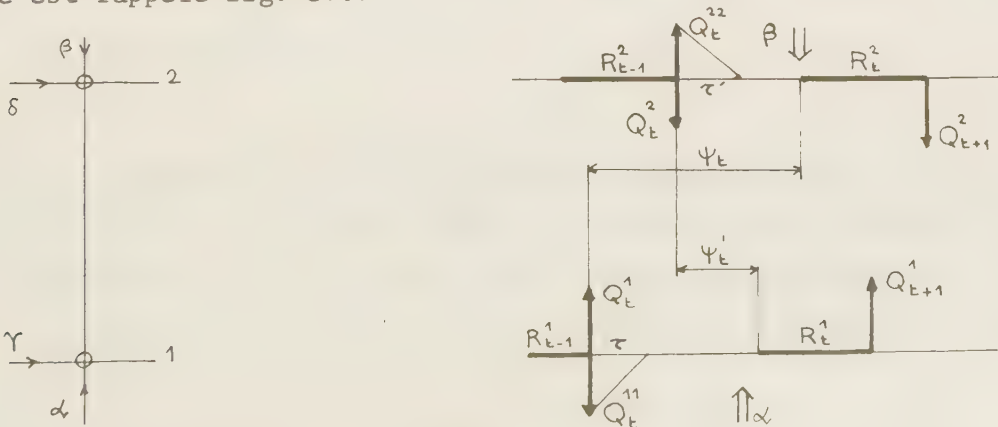


Fig. 3.1

où nous notons : τ, τ' temps d'évacuation des queues Q_t^{11}, Q_t^{22}
 α débit moyen d'arrivée au carrefour 1
 β débit moyen d'arrivée au carrefour 2

Les hypothèses que nous avons faites,

$$\begin{cases} \psi_t + R_t^2 = 2\tau_0 + \tau'_0 \\ \psi'_t + R_t^1 = \tau'_0 \\ c = \tau_0 + \tau'_0 \end{cases}$$

nous permettent de tracer les courbes donnant Q_{t+1}^2 et Q_{t+1}^1 en fonction des différentes commandes ; ces courbes sont faciles à déterminer si on se reporte en Annexe 1, où toutes les équations ont été rassemblées dans le plan des commandes (ψ_t, R_t^2) et (ψ'_t, R_t^1) (fig. 3.2).

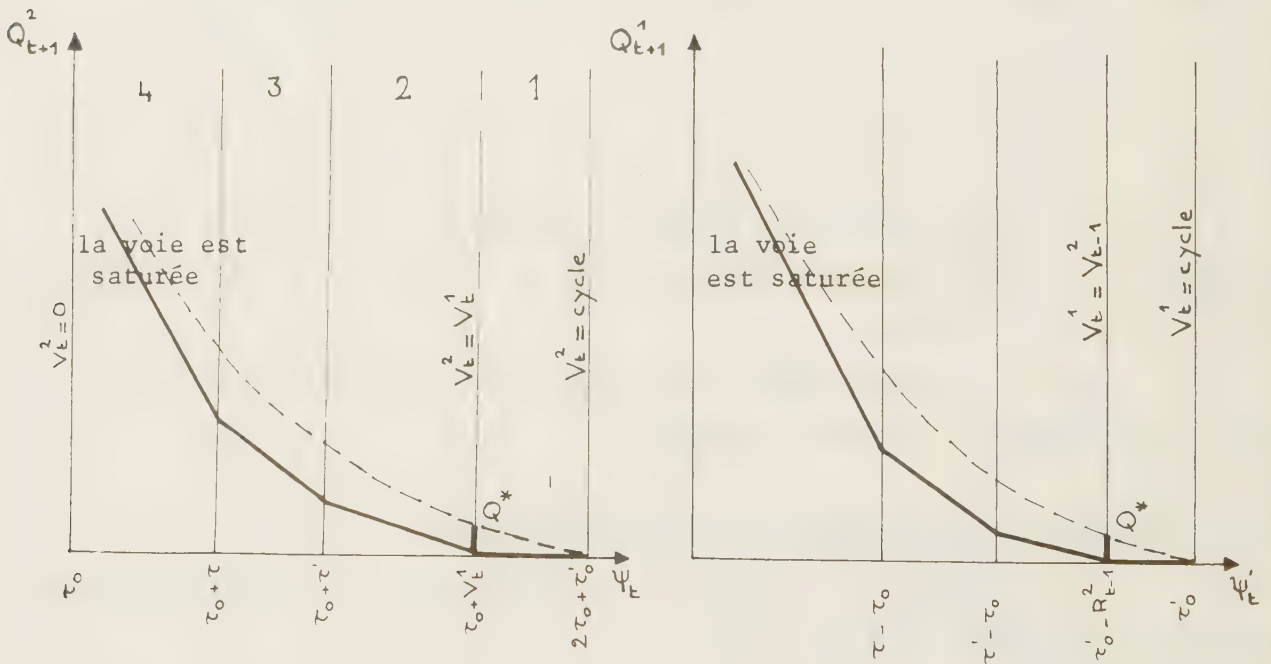


Fig. 3.2

Ces courbes sont linéaires par morceaux et on y a adjoint le fait que les voies étaient susceptibles de se saturer (zones 3 et 4). Les équations d'état sont linéaires dans chaque zone. Elles ont pour expressions, par exemple, pour la première courbe :

$$\begin{aligned} (1) \quad & Q_{t+1}^2 = 0 \\ (2) \quad & Q_{t+1}^2 = \alpha(\tau_0 + V_t^1 - \psi_t) \end{aligned}$$

$$(3) \quad Q_{t+1}^2 = \alpha(\tau_o + v_t^1 - \psi_t) + (s-\alpha) (\tau' - \psi_t + \mu_{t-1})$$

$$(4) \quad Q_{t+1}^2 = (\alpha-2s)\psi_t + s(\tau_o + v_t^1) + (s-\alpha) (\tau - v_t^1 + \tau' + \mu_{t-1})$$

En réalité, ces courbes ne sont pas si bien définies à cause essentiellement de la dispersion des pelotons et du caractère aléatoire de la circulation. C'est pourquoi, on définit des courbes plus proches de celles que l'on observerait sur site (courbes pointillées) ne présentant pas de discontinuités dans la dérivée et susceptibles d'être approchées par une fonction analytique en ψ_t . Remarquons dès maintenant que, pour une valeur ψ_t fixée, l'état Q_{t+1}^2 est fonction linéaire des autres paramètres α , s , v_t^1 et des états Q_t^2 , Q_t^{11} . On posera :

$$Q_{t+1}^2 = f^2(\psi_t, \alpha, v_t^1, Q_t^2, Q_t^{11})$$

et, de la même façon :

$$Q_{t+1}^1 = g^1(\psi_t, \beta, v_{t-1}^2, Q_t^1, Q_{t-1}^{22})$$

Lorsque ce chaînon est inclus dans un réseau, les débits α et β ci-dessus définis dépendent des états et des commandes des carrefours adjacents (cf. Annexe 1).

L'étude du fonctionnement d'un chaînon se décompose alors en deux problèmes distincts : "allocation" et "régulation".

1) Le problème "d'allocation" consiste à déterminer, d'après les valeurs des débits d'arrivée, les commandes nominales à appliquer et les valeurs nominales des états qui en résultent. La spécification de ces conditions découle du choix d'un critère de performance et de l'observation du trafic dans le réseau, lorsque celui-ci fonctionne en régime permanent. En général, ces conditions nominales sont variables dans le temps ; on tiendra compte de cette non-stationnarité dans le choix du point de fonctionnement en les supposant constantes sur de petites périodes (quelques minutes) seulement.

2) Si le fonctionnement du système subit de petites perturbations, la régulation le ramènera, de manière optimale, à ses conditions nominales. Le régulateur peut, en outre, assurer les transitions entre deux points de fonctionnement.

Reprenons en détail ces deux problèmes appliqués à notre exemple de chaînon.

1.1.1 - Choix du point de fonctionnement

Montrons d'abord, sur l'exemple d'un chaînon, que, si on emploie un critère de performance fonction des longueurs de queue, il est préférable d'afficher des valeurs de vert égales sur les deux carrefours. Considérons les deux cas de figure suivants :

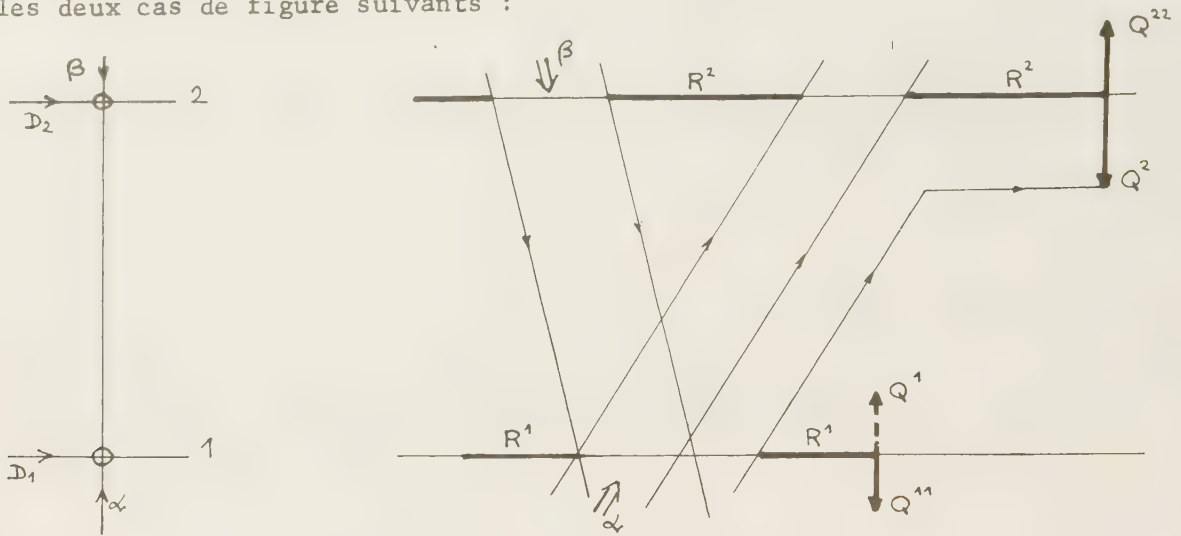


Fig. 3.3

$R_2 > R_1$

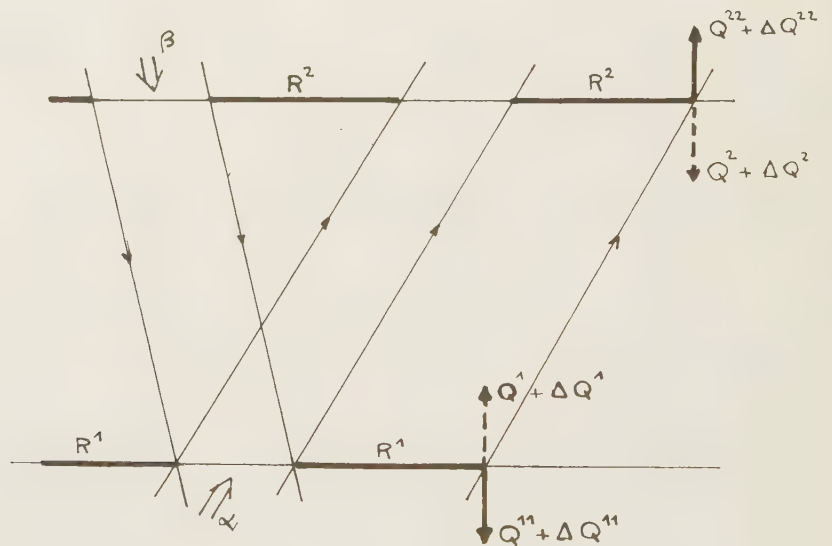


Fig. 3.4

$R_2 = R_1$

On a noté α, β, D_1, D_2 les débits d'arrivée des voies directes et des voies transversales ; ils sont supposés constants.

Q^{11}, Q^1, Q^2, Q^{22} sont les longueurs de queues des voies directes, Q^{21} et Q^{12} les longueurs de queues des voies transversales.

Le premier cas de figure (fig. 3.3), pour lequel $R_2 > R_1$, fait apparaître des longueurs de queue, dont les valeurs sont :

$$\begin{aligned} Q^{11} &= \alpha R^1 & Q^{22} &= \beta R^2 \\ Q^1 &= 0 & Q^2 &= \alpha (R_2 - R_1) \\ Q^{12} &= D_1(c - R_1) & Q^{21} &= D_2(c - R_2) \end{aligned}$$

Le second cas de figure (fig. 3.4) où $R_2 = R_1 = R$ montre que ces longueurs de queue deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta Q^{11} + Q^{11} &= \alpha R & \Delta Q^{22} + Q^{22} &= \beta R \\ \Delta Q^1 + Q^1 &= 0 & \Delta Q^2 + Q^2 &= 0 \\ \Delta Q^{12} + Q^{12} &= D_1(c - R) & \Delta Q^{21} + Q^{21} &= D_2(c - R) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \Delta Q^{11} &= \alpha(R - R^1) & \Delta Q^{22} &= 0 \\ \Delta Q^1 &= 0 & \Delta Q^2 &= -\alpha(R - R_1) \\ \Delta Q^{12} &= -D_1(R - R_1) & \Delta Q^{21} &= 0 \end{aligned}$$

L'analyse de ces résultats montre que, à cause du terme ΔQ^{12} , les longueurs de queues sont plus petites pour le cas de figure 3.4 ; il est donc justifié d'afficher des valeurs de vert égales sur tous les carrefours.

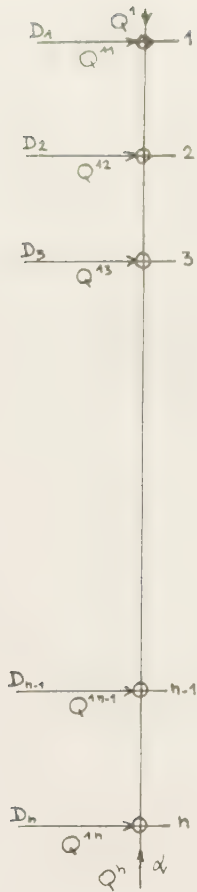
Dans ces conditions, les longueurs de queues Q^1 et Q^2 prennent, comme le montre la figure 3.2, une certaine valeur Q^* qu'on ne peut déterminer que par l'expérience.

Calcul de la commande optimale en régime permanent

Le calcul de la durée de vert commune V^* , en régime permanent, est réalisé en ne considérant que les voies d'accès du réseau.

Considérons que n carrefours constituent ce réseau et appelons :

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, D_i \quad (i = 1, n) & \text{ les débits d'arrivée,} \\ Q^n, Q^1, Q^{1i} \quad (i = 1, n) & \text{ les longueurs de queues} \end{aligned}$$



Les équations d'état en régime permanent sont :

$$Q^1 = \beta(c-V)$$

$$Q^{1i} = D_i V \quad i = 1, n$$

$$Q^n = \alpha(c-V)$$

Les contraintes de non saturation sont :

$$V \geq \sup \left[\frac{\alpha}{s_{11}} c, \frac{\beta}{s_{22}} c \right] \text{ pour les voies directes}$$

$$V \leq \inf \left[c \left(1 - \frac{D_i}{s_i} \right), i = 1, n \right] \text{ pour les voies transversales}$$

où s_{11} , s_{22} , s_i ($i = 1, n$) sont les débits de saturation.

On désire calculer la commande V qui minimise le critère :

$$J = \alpha_1 (Q^1)^2 + \alpha_n (Q^n)^2 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} (Q^{1j})^2$$

où α_1 , α_n , α_{1j} sont des coefficients de pondération.

La solution de ce problème d'optimisation statique s'obtient hors contraintes, en annulant la dérivée partielle de J par rapport à V :

$$\frac{\partial J}{\partial V} = 0 \Rightarrow -\alpha_1 \beta^2 (c-V) - \alpha_n \alpha^2 (c-V) + \sum_{j=1}^n D_j^2 \alpha_{1j} V = 0$$

$$\text{soit : } V^* = c \frac{\alpha_1 \beta^2 + \alpha_n \alpha^2}{\alpha_1 \beta^2 + \alpha_n \alpha^2 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} D_j^2}$$

Si cette valeur de V^* n'appartient pas au domaine permis, le minimum du critère est obtenu pour les valeurs mini ou maxi de V .

Les états en régime permanent s'obtiennent alors facilement en remplaçant V par V^* dans les équations d'états ci-dessus.

Remarque : On pourra prendre comme coefficients de pondération :

$$\alpha_1 = 1 ; \alpha_n = 1 ; \alpha_{1j} = \frac{1}{n} \quad (j = 1, n),$$

si on désire favoriser l'axe ; sinon on prendra :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} ; \alpha_n = \frac{1}{2} ; \alpha_{1j} = \frac{1}{n} \quad (j = 1, n)$$

1.1.2 - Linéarisation

On peut maintenant linéariser les équations donnant Q_{t+1}^1 et Q_{t+1}^2 en fonction des commandes autour du point de fonctionnement défini ci-dessus ; rappelons ces équations (cf. 1.1) :

$$Q_{t+1}^2 = f^2(\psi_t, \alpha, v_t^1, Q_t^2, Q_t^{11})$$

$$Q_{t+1}^1 = g^1(\psi_t', \beta, v_{t-1}^2, Q_t^1, Q_{t-1}^{22})$$

Elles deviennent alors :

$$\Delta Q_{t+1}^2 = a \Delta \psi_t + b \Delta v_t^1 + c \Delta Q_t^2 + d \Delta Q_t^{11} + e \Delta \alpha$$

$$\Delta Q_{t+1}^1 = \alpha \Delta \psi_t' + \beta \Delta v_{t-1}^2 + \gamma \Delta Q_t^1 + \delta \Delta Q_{t-1}^{22} + \varepsilon \Delta \beta$$

où $\Delta(.)$ désigne une variation de $(.)$ autour du point de fonctionnement nominal, et où les coefficients $(a, b, c, d, e), (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ dépendent du point de fonctionnement et des caractéristiques du chaînon. Pour compléter ce modèle, on adjoint les équations d'état des voies adverses et des approches du réseau qui sont linéaires :

$$\Delta Q_{t+1}^{22} = a' \Delta Q_t^{22} + b' \Delta \psi_t + c' \Delta \beta$$

$$\Delta Q_{t+1}^{11} = \alpha' \Delta Q_t^{11} + \beta' \Delta \psi_t' + \gamma' \Delta \alpha$$

$$\Delta Q_{t+1}^{12} = \alpha'' \Delta Q_t^{12} + \beta'' \Delta \psi_t' + \gamma'' \Delta \gamma$$

$$\Delta Q_{t+1}^{21} = a'' \Delta Q_t^{21} + b'' \Delta \psi_t + c'' \Delta \delta$$

Ce chaînon peut se représenter sous forme vectorielle en posant :

$$\underline{\Delta Q}_t = \begin{bmatrix} \Delta Q_t^{22} \\ \Delta Q_t^{21} \\ \Delta Q_t^2 \\ \Delta Q_t^1 \\ \Delta Q_t^{12} \\ \Delta Q_t^{11} \end{bmatrix} \quad \underline{u}_t = \begin{bmatrix} \Delta \psi_t \\ \Delta \psi_t' \end{bmatrix}$$

et devient :

$$\underline{\Delta Q}_{t+1} = \Phi \underline{\Delta Q}_t + \Gamma \underline{u}_t + \underline{\gamma}_t$$

$$\text{avec } \Phi = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha' \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} b' & 0 \\ b'' & 0 \\ a & b \\ 0 & \alpha \\ 0 & \beta'' \\ 0 & \beta' \end{bmatrix}$$

$$\underline{\gamma}_t = \begin{bmatrix} c' \Delta \beta \\ c'' \Delta \delta \\ e \Delta \alpha \\ \varepsilon \Delta \beta + \beta \Delta V_{t-1}^2 + \delta \Delta Q_{t-1}^{22} \\ \gamma'' \Delta \gamma \\ \gamma' \Delta \alpha \end{bmatrix}$$

Le vecteur perturbation $\underline{\gamma}_t$ dépend ici des commandes, des états précédents et des variations de débit sur les approches.

1.2 - EXTENSION A UN RESEAU

Le cas simple étudié précédemment nous a conduit à une équation d'état récurrente que nous allons généraliser à un ensemble plus complexe.

Il faudra tenir compte dans cette étude de la dépendance des débits d'arrivée vis-à-vis des états et des commandes aux carrefours adjacents.

La mise en équation d'un réseau sera établie sur un exemple particulier de 7 carrefours en ligne ; la généralisation à un réseau quelconque ne présente en effet aucune difficulté.

La figure 3.5 nous montre la disposition de ces carrefours. Notons que la durée de cycle est commune et que les décalages sont égaux, ce qui implique que les instants de fin de rouge sont identiques pour la moitié des carrefours.

Reprenons la mise en équation d'un chaînon ; d'après ce que nous avons vu précédemment (cf. 1.1), on a :

$$\Delta X_{t+1}^1 = a^1 \Delta \psi_t^1 + b^1 \Delta \phi_t^1 + c^1 \Delta X_t^1 + d^1 \Delta X_t^2 + e^1 \Delta \alpha_2$$

Or, le débit α_2 dépend de X_{t-1}^3 , ϕ_t^1 et ψ_{t-1}^2 (cf. 1.4) ; La linéarisation de ce débit autour du point de fonctionnement choisi conduit à l'équation suivante :

$$\Delta X_{t+1}^1 = a^1 \Delta \psi_t^1 + b_1 \Delta \phi_t^1 + c^1 \Delta X_t^1 + d^1 \Delta X_t^2 + e^1 \Delta X_{t-1}^3 + f^1 \Delta \psi_{t-1}^2$$

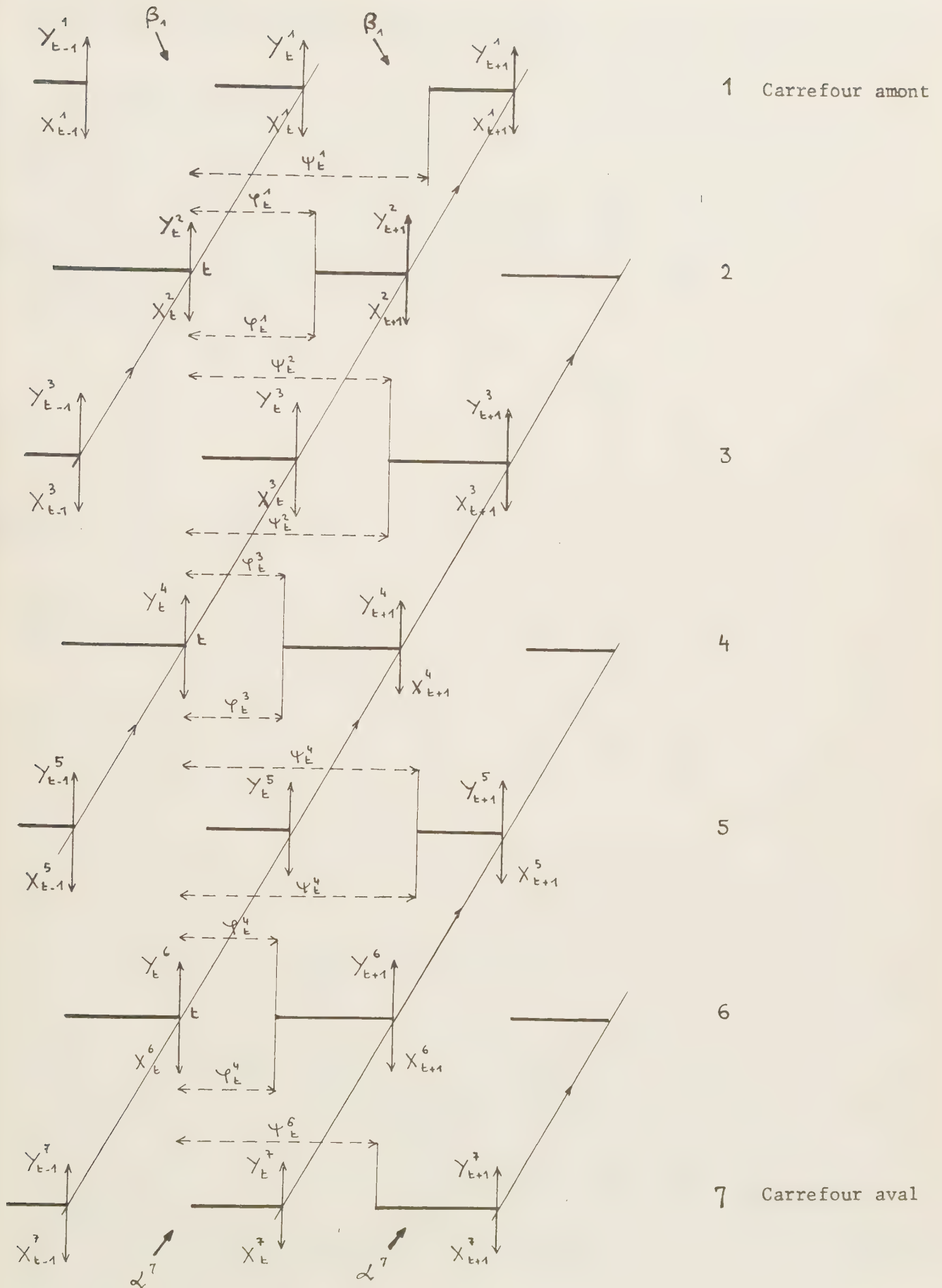


Fig. 3.5

où a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 et f_1 sont des coefficients dépendant des caractéristiques du réseau et du point de fonctionnement choisi.

La mise en équation de ce réseau est donc, si on appelle Z_t^i les longueurs de queues des voies latérales du carrefour n°i :

$$\begin{aligned} Y_{t+1}^1 &= K^1 + \alpha^1 \Delta \psi_t^1 + \gamma^1 \Delta Y_t^1 + \beta^1 \Delta \beta_1 \\ Z_{t+1}^1 &= Z_o^1 + \mu_1 \Delta \psi_t^1 + \rho_1 \Delta Z_t^1 + \tau_1 \Delta D_1 \\ X_{t+1}^1 &= k_1 + a^1 \Delta \psi_t^1 + b_1 \Delta \phi_t^1 + c^1 \Delta X_t^1 + d^1 \Delta X_t^2 + e^1 \Delta X_{t-1}^3 + f^1 \Delta \psi_{t-1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{t+1}^2 &= K^2 + \alpha^2 \Delta \phi_t^1 + \beta^2 \Delta \psi_{t-1}^1 + \gamma^2 \Delta Y_t^2 + \delta^2 \Delta Y_{t-1}^1 + \epsilon^2 \Delta \beta_1 \\ Z_{t+1}^2 &= Z_o^2 + \mu_2 \Delta \phi_t^1 + \rho_2 \Delta Z_t^2 + \tau_2 \Delta D_2 \\ X_{t+1}^2 &= k^2 + a^2 \Delta \phi_t^1 + b^2 \Delta \psi_{t-1}^1 + c^2 \Delta X_t^2 + d^2 \Delta X_{t-1}^3 + e^2 \Delta X_{t-1}^4 + f^2 \Delta \phi_{t-1}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{t+1}^3 &= K^3 + \alpha^3 \Delta \psi_t^2 + \beta^2 \Delta \phi_t^1 + \gamma^3 \Delta Y_t^3 + \delta^3 \Delta Y_t^2 + \lambda^3 \Delta Y_{t-1}^1 + g^3 \Delta \psi_{t-1}^1 \\ Z_{t+1}^3 &= Z_o^3 + \mu_3 \Delta \psi_t^2 + \rho_3 \Delta Z_t^3 + \tau_3 \Delta D_3 \\ X_{t+1}^3 &= k^3 + a^3 \Delta \psi_t^2 + b^3 \Delta \phi_t^3 + c^3 \Delta X_t^3 + d^3 \Delta X_t^4 + e^3 \Delta X_{t-1}^5 + f^3 \psi_{t-1}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{t+1}^6 &= K^6 + \alpha^6 \Delta \phi_t^4 + \beta^6 \Delta \psi_{t-1}^4 + \gamma^6 \Delta Y_t^6 + \delta^6 \Delta Y_{t-1}^5 + \lambda^6 \Delta Y_{t-1}^4 + g^6 \Delta \phi_{t-1}^3 \\ Z_{t+1}^6 &= Z_o^6 + \mu_6 \Delta \phi_t^4 + \rho_6 \Delta Z_t^6 + \tau_6 \Delta D_6 \\ X_{t+1}^6 &= k^6 + a^6 \Delta \phi_t^4 + b^6 \Delta \psi_{t-1}^6 + c^6 \Delta X_t^6 + d^6 \Delta X_{t-1}^7 + e^7 \Delta \alpha^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{t+1}^7 &= K^7 + \alpha^7 \Delta \psi_t^6 + \beta^7 \Delta \phi_t^4 + \gamma^7 \Delta Y_t^7 + \delta^7 \Delta Y_t^6 + \lambda^7 \Delta Y_{t-1}^5 + g^7 \Delta \psi_{t-1}^4 \\ Z_{t+1}^7 &= Z_o^7 + \mu_7 \Delta \psi_t^6 + \rho^7 \Delta Z_t^7 + \tau^7 \Delta D^7 \\ X_{t+1}^7 &= k^7 + a^7 \Delta \psi_t^6 + c^7 \Delta X_t^7 + d^7 \Delta \alpha^7 \end{aligned}$$

où on a noté D^i le débit d'arrivée des voies latérales du carrefour n°i.

Si n est le nombre de carrefours composant le réseau, ce système peut se représenter sous forme vectorielle par l'équation :

$$\Delta \underline{X}_{t+1} = \Phi \Delta \underline{X}_t + \mathbb{C} \Delta \underline{X}_{t-1} + \Gamma \underline{u}_t + \underline{Y}_t + \Gamma' \underline{u}_{t-1}$$

où Φ matrice carrée de dimension $3n$

$\mathbb{C}$ " " " $3n$

Γ matrice de commande de dimension $(3n, n)$

$\underline{Y}_t$ vecteur d'état de dimension $3n$

$\underline{u}_t$ vecteur de commande de dimension n

Les matrices ainsi définies étant :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \gamma^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^1 & 0 & 0 & d^1 & 0 \\ 0 & \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^3 & 0 & 0 & \gamma^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d^3 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^5 & 0 & 0 & \gamma^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & e^1 \end{smallmatrix} & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \begin{smallmatrix} \delta^2 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix} & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & d^2 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & e^2 \end{smallmatrix} & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \begin{smallmatrix} \lambda^3 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix} & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & e^3 \end{smallmatrix} & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \begin{smallmatrix} \lambda^4 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \delta^4 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix} & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & d^4 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & e^4 \end{smallmatrix} & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \lambda^5 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix} & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & e^5 \end{smallmatrix} \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \lambda^6 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \delta^6 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix} & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & d^6 \end{smallmatrix} \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \begin{smallmatrix} \lambda^7 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix} & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$$

Si on pose $\underline{u}_t$ le vecteur de commande tel que :

$$\underline{u}_t^T = [\Delta\psi_t^1 \quad \Delta\phi_t^1 \quad \Delta\psi_t^2 \quad \Delta\phi_t^3 \quad \Delta\psi_t^4 \quad \Delta\phi_t^4 \quad \Delta\psi_t^6]$$

on obtient la matrice de commande Γ suivante :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta^3 & \alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta^5 & \alpha^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^5 & b^5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^7 & \alpha^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^7 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & f^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline g^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f^3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & g^4 & \beta^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^4 & f^4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & g^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & g^6 & \beta^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & g^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le dernier vecteur $\underline{y}_t$ contenant les entrées du réseau sous forme de variations des débits d'arrivée :

$\Delta\beta_1$ et $\Delta\alpha_7$ pour les entrées de l'axe

ΔD_i pour les entrées perpendiculaires

L'étude de cet exemple permet de généraliser facilement à un réseau plus complexe.

En fait, comme le montre la structure des matrices ci-dessus définies, un réseau est un ensemble de sous-systèmes (carrefours isolés) interconnectés les uns avec les autres. Ceci apparaît très clairement dans les matrices Φ et Γ qui sont diagonales par blocs et qui contiennent en outre des termes de couplages.

Chaque sous-système ainsi défini comprend trois états (longueurs de queues) et une commande (durée de vert) et son fonctionnement dépend des deux carrefours amont et des deux carrefours aval comme le montre la figure 3.6.

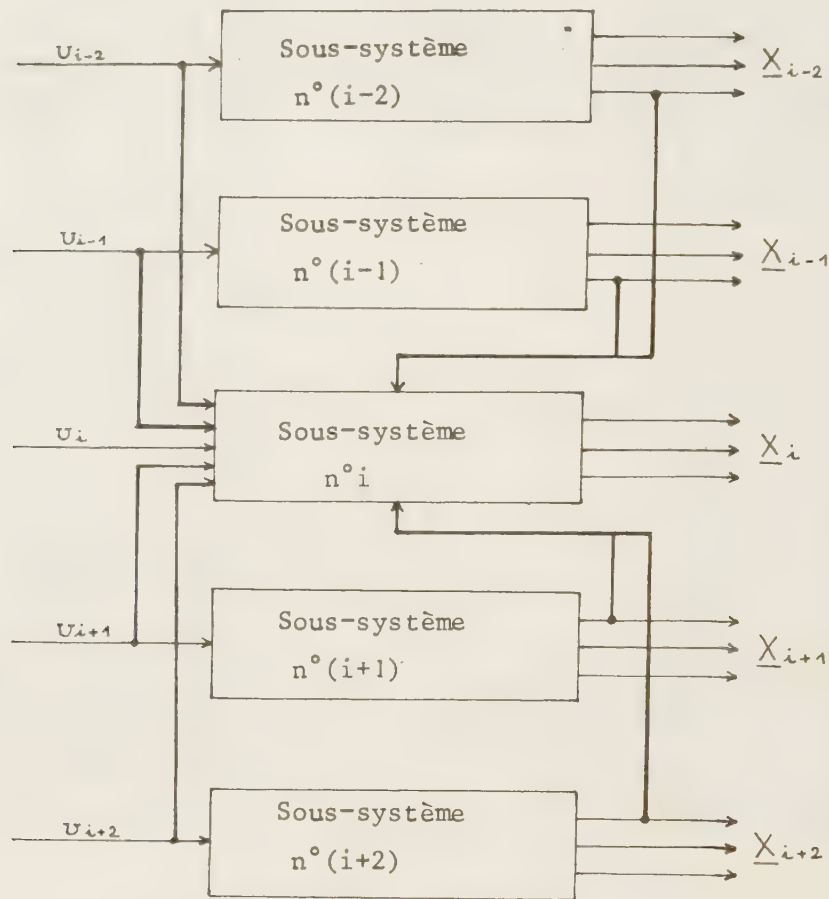


Fig. 3.6

Conclusion :

Le modèle de commande obtenu sous les hypothèses suivantes :

- Le cycle et les décalages sont communs à tous les carrefours
- Le système évolue autour d'un point de fonctionnement déterminé par la valeur des débits d'entrée du réseau.

est de la forme :

$$\Delta X_{t+1} = \Phi \Delta X_t + C \Delta X_{t-1} + \Gamma u_t + \Gamma' u_{t-1} + \gamma_t$$

avec :

$\Delta \underline{X}_t$: vecteur d'état contenant les variations des longueurs de queue autour de leurs valeurs nominales,

$\underline{u}_t$: vecteur de commande contenant les variations des durées de vert autour de leurs valeurs nominales,

$\underline{Y}_t$: vecteur perturbation contenant les variations des débits d'entrée du réseau autour de leurs valeurs nominales,

et où les matrices Φ , C , Γ et Γ' possèdent des structures particulières, permettant la décomposition du réseau en sous-systèmes interconnectés.

Les paramètres du point de fonctionnement sont déterminés comme suit (cf. 1.1.1) :

- les durées de vert sont communes à tous les carrefours,
- leur valeur minimise, en régime permanent, le critère :

$$J = \sum \alpha_{ij} (Q^{ij})^2$$

où Q^{ij} sont les longueurs de queue aux différentes entrées du réseau et α_{ij} sont des coefficients de pondération.

Le chapitre suivant est consacré à la régulation d'un réseau de ce type.

Chapitre 2

SIMULATION DE LA COMMANDE EN LIGNE DES FEUX D'UN RESEAU

Le modèle linéarisé obtenu dans le chapitre précédent est utilisé pour mettre en oeuvre une politique optimale de commande des feux. Après avoir défini le critère de régulation, nous serons capables de résoudre le problème de l'optimisation globale du fonctionnement d'un réseau avec application en simulation à un axe comportant quatre carrefours en ligne.

2.1 - CRITERE DE REGULATION

On se propose de déterminer le vecteur de commande $\underline{u}_t$ qui minimise le critère :

$$J = \sum_{i=t}^{t+N} \{ \Delta \underline{X}_i^T Q \Delta \underline{X}_i + \underline{u}_i^T R \underline{u}_i \}$$

où Q et R sont des matrices de pondération diagonales et N la période d'optimisation (nombre de cycles), compte tenu des équations d'état :

$$\Delta \underline{X}_{t+1} = \phi \Delta \underline{X}_t + C \Delta \underline{X}_{t-1} + \Gamma \underline{u}_t + \Gamma' \underline{u}_{t-1} + \underline{Y}_t$$

établies dans le chapitre précédent. '

La nature et le contenu du critère appellent plusieurs remarques :

- La minimisation de J signifie que l'on désire amener ou ramener de manière optimale, le système aux alentours du point de fonctionnement nominal, tout en évitant de trop grandes amplitudes de variations des commandes (matrice de pondération R).
- Le critère J étant quadratique et les équations d'état linéaires, on sait que la commande optimale $\underline{u}_t^*$ sera en boucle fermée sur les états et les perturbations.
- Le choix des coefficients de la matrice Q permet de favoriser une voie par rapport à une autre (on décidera, par exemple, que la circulation le long de l'axe est prioritaire sur le trafic des voies latérales).
- La période d'optimisation N , en général de quelques cycles, dépendra de la prédiction possible des débits d'arrivée.

2.2 - CALCUL D'UNE COMMANDE EN BOUCLE FERMEE

2.2.1 - Théorie

L'équation d'état précédente est une équation récurrente avec des retards dans les états et les commandes. Pour être en mesure d'utiliser les méthodes classiques d'optimisation, il est nécessaire de transformer cette équation et la mettre sous la forme :

$$\underline{z}_{t+1} = F \underline{z}_t + G \underline{u}_t + \underline{\varepsilon}_t$$

où $\underline{z}_t$ est le vecteur d'état généralisé.

Nous effectuerons cette transformation en deux étapes : suppression des retards dans l'état, puis suppression des retards dans la commande.

- RETARDS SUR L'ETAT

Afin de conserver la structure particulière des équations, nous poserons le nouveau vecteur d'état :

$$\underline{\Delta Y}_{t+1} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \Delta Y_{t+1}^i \\ \Delta Y_t^i \\ \Delta Z_{t+1}^i \\ \Delta Z_t^i \\ \Delta X_{t+1}^i \\ \Delta X_t^i \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{de dimension } 6n \text{ si } n \\ \text{est le nombre de} \\ \text{carrefours.} \end{array}$$

Les équations d'état prennent alors la forme :

$$\underline{\Delta Y}_{t+1} = \phi' \Delta \underline{Y}_t + H \underline{u}_t + H' \underline{u}_{t-1} + \underline{\gamma}'_t$$

avec :

et le vecteur perturbation $\underline{y}'_t$ est :

$$\underline{y}'_t = \begin{bmatrix} \varepsilon^1 \Delta \varepsilon_1 \\ 0 \\ \tau^1 \Delta D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \varepsilon^2 \Delta \varepsilon_1 \\ 0 \\ \tau^2 \Delta D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \tau^3 \Delta D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ 0 \\ \tau^i \Delta D_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ 0 \\ \tau_{n-1} \Delta D_{n-1} \\ 0 \\ \varepsilon^{n-1} \Delta \alpha^n \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \tau_n \Delta D_n \\ \vdots \\ d^n \Delta \alpha^n \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{de dimension } 6n$$

où $\Delta\beta_1$ et $\Delta\alpha^n$ sont les variations des débits d'entrée du réseau.

ΔD_i les variations des débits d'entrée latéraux

$\tau^i, \beta^1, \varepsilon^2, d^n$ sont des coefficients.

- RETARDS SUR LA COMMANDE

La procédure adoptée ici est d'élargir l'espace d'état. Définissons en effet :

$$\underline{Z}_t = \begin{bmatrix} \Delta Y_{-t} \\ U_{-t-1} \end{bmatrix} \quad \text{le nouveau vecteur d'état de dimension } 7n$$

Alors, l'équation d'état devient :

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{-t+1} \\ U_{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi' & H' \\ \theta & \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Y_{-t} \\ U_{-t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ 1 \end{bmatrix} U_{-t} + \begin{bmatrix} \gamma'_{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $\mathbb{I}$ désigne la matrice unité de dimension $(n \times n)$ soit :

$$\underline{Z}_{t+1} = F \underline{Z}_t + G \underline{u}_t + \underline{\varepsilon}_t$$

où les matrices $F, G, \underline{\varepsilon}_t$ sont définies ci-dessus et ont pour dimensions :

$$\dim F = (7n \times 7n)$$

$$\dim G = (7n \times n)$$

$$\dim \underline{\varepsilon}_t = (7n \times 1)$$

Nous avons donc obtenu une équation discrète linéaire qui peut être utilisée pour obtenir une loi de commande optimale par l'intermédiaire des méthodes classiques d'optimisation quadratique.

Nous reprendrons dans la suite, les notations suivantes :

$$\Delta X_{-t+1} = \phi' \Delta X_{-t} + H u_{-t} + \gamma'_{-t}$$

Le critère J garde la structure précédente et les matrices de pondération Q et R restent diagonales.

Reposons alors le problème de commande :

Déterminer le vecteur de commande $\underline{u}_t$ qui minimise :

$$J = \sum_{i=t}^{t+N} \{ \underline{\Delta X}_i^T Q \underline{\Delta X}_i + \underline{u}_i^T R \underline{u}_i \}$$

compte tenu des équations d'état :

$$\underline{\Delta X}_{t+1} = \phi' \underline{\Delta X}_t + H \underline{u}_t + \underline{\gamma}'_t$$

La résolution de ce problème classique d'optimisation utilise le principe du maximum ou la programmation dynamique et conduit aux résultats suivants :

La commande optimale est :

$$\underline{u}_t^* = S_t \underline{\Delta X}_t + \underline{G}_t$$

avec :

$$S_t = - (R + H^T \alpha_{t+1} H)^{-1} H^T \alpha_{t+1} \phi'$$

$$\underline{G}_t = - (R + H^T \alpha_{t+1} H)^{-1} H^T (\alpha_{t+1} \underline{\gamma}'_t - \underline{\beta}_{t+1})$$

α_t et $\underline{\beta}_t$ obéissant aux équations récurrentes :

$$(1) \quad \alpha_t = \phi'^T \alpha_{t+1} \left[1 - H (R + H^T \alpha_{t+1} H)^{-1} H^T \alpha_{t+1} \right] \phi' + Q$$

$$(2) \quad \underline{\beta}_t = \phi'^T \left[-1 + \alpha_{t+1} H (R + H^T \alpha_{t+1} H)^{-1} H^T \right] (\alpha_{t+1} \underline{\gamma}'_t - \underline{\beta}_{t+1})$$

$$\alpha_N = Q \quad \text{et} \quad \underline{\beta}_N = \underline{0}$$

Si on emploie un critère à horizon fuyant et si le système est stationnaire, la matrice de bouclage S_t est constante et est obtenue en intégrant à rebours l'équation (1).

Si, de plus, les perturbations sont constantes sur la période d'optimisation, $\underline{\beta}_t$ et donc $\underline{G}_t$ sont constants et sont obtenus en intégrant l'équation (2).

La loi de commande optimale devient alors :

$$\underline{u}_t^* = S \underline{\Delta X}_t + \underline{G}$$

$$\text{avec } S = - (R + H^T \alpha H)^{-1} H^T \alpha \phi'$$

$$\underline{G} = - (R + H^T \alpha H)^{-1} H^T (\alpha \underline{\gamma}'_t - \underline{\beta})$$

où α et $\underline{\beta}$ sont les solutions des équations (1) et (2).

2.2.2 - Application

L'application sur site et en simulation du système de commande ci-dessus établi passe par les étapes suivantes :

- 1) Choix des points de fonctionnement : les paramètres d'un point de fonctionnement dépendent de certaines valeurs nominales des débits d'entrée du réseau ; ces paramètres sont :

- | | | |
|--|---|---------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> - vert nominal - longueurs de queues nominales - coefficients des matrices ϕ' et H du modèle linéarisé, - coefficients de la matrice de bouclage S. | } | donnés par le modèle statique (I.1.1) |
|--|---|---------------------------------------|

On déterminera les valeurs nominales des débits d'entrée grâce à des enregistrements préalables de l'évolution du trafic dans un grand nombre de conditions. Ces valeurs, valables sur des périodes assez longues (quelques heures), seront par exemple des valeurs moyennes.

- 2) Adaptation aux conditions particulières du trafic

Les débits d'arrivée réels ne correspondent pas obligatoirement aux débits nominaux du point de fonctionnement préalablement établi. Une estimation en ligne, valable sur des périodes de temps relativement courtes (quelques cycles), fournira, par l'intermédiaire du modèle statique, les caractéristiques du nouveau point de fonctionnement (vert optimal, longueurs de queues optimales). A partir de cette estimation, deux cas peuvent se produire :

a) l'estimation du débit est égale à la valeur nominale prévue (fig 3.7) dans ce cas, l'équation d'état est :

$$\Delta X_{t+1} = \phi \Delta X_t + H u_t + \underline{\gamma}'_t$$

où $\underline{\gamma}'_t$ contient les variations des débits d'arrivée autour de leurs valeurs nominales.

Comme on ne peut absolument pas les prévoir, on admettra que $\underline{y}'_t$ est une séquence aléatoire blanche et de moyenne nulle.

La loi de commande optimale se réduit donc à :

$$\underline{u}_t = S \Delta \underline{X}_t$$

où la matrice de bouclage S a été calculée en 2.2.1.

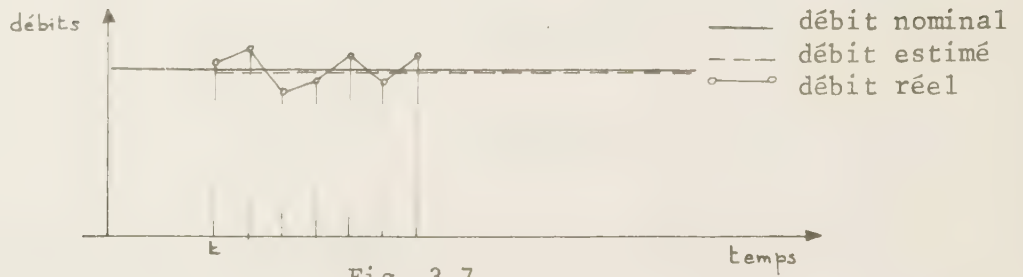


Fig. 3.7

b) Si le débit d'arrivée est différent de la valeur nominale prévue, le point de fonctionnement statique optimal se trouve déplacé (on le détermine grâce au modèle statique exposé en 1.1.1). Le régulateur doit donc avoir pour rôle de recaler le système sur ce nouveau point de fonctionnement. Déterminons ce régulateur :

Soient :

$\underline{X}^*, \underline{V}^*$ les paramètres du point de fonctionnement nominal

$\hat{\underline{X}}, \hat{\underline{V}}$ " " " nouveau point de fonctionnement.

appelons :

$$\Delta \underline{X}_t = \underline{X}_t - \underline{X}^* \qquad \underline{u}_t = \underline{V}_t - \underline{V}^*$$

$$\Delta \hat{\underline{X}} = \hat{\underline{X}} - \underline{X}^* \qquad \hat{\underline{u}} = \hat{\underline{V}} - \underline{V}^*$$

les vecteurs d'état et de commande ; ils obéissent aux équations :

$$\Delta \underline{X}_{t+1} = \phi \Delta \underline{X}_t + H \underline{u}_t + \underline{y}'_t$$

$$\Delta \hat{\underline{X}} = \phi \Delta \hat{\underline{X}} + H \hat{\underline{u}}$$

où $\underline{\gamma}'_t$ est une séquence aléatoire blanche et de moyenne nulle.

Combinant ces équations, il vient :

$$(\Delta \underline{X}_{t+1} - \hat{\Delta \underline{X}}) = \phi(\Delta \underline{X}_t - \hat{\Delta \underline{X}}) + H(\underline{u}_t - \hat{u}) + \underline{\gamma}'_t$$

Recaler le système autour du nouveau point de fonctionnement revient à chercher $(\underline{u}_t - \hat{u})$ qui minimise le critère :

$$J = \sum_t^{t+N} \{ (\Delta \underline{X}_t - \hat{\Delta \underline{X}})^T Q (\Delta \underline{X}_t - \hat{\Delta \underline{X}}) + (\underline{u}_t - \hat{u})^T R (\underline{u}_t - \hat{u}) \}$$

D'après les hypothèses faites sur la séquence $\underline{\gamma}'_t$, la solution de ce problème est :

$$\underline{u}_t^* = \hat{u} + S (\Delta \underline{X}_t - \hat{\Delta \underline{X}})$$

où la matrice S est calculée comme en 2.2.1.

Remarques

- On retrouve le cas précédent si $\hat{\Delta \underline{X}} = 0$
- Le régulateur assure le passage d'un point de fonctionnement à un autre en favorisant les transitoires.

L'application du système de commande ci-dessus établi a été réalisée en simulation sur un ensemble de quatre carrefours en ligne fonctionnant à cycle fixe (Fig 3.8).

On a supposé, pour cette simulation, que l'estimation des débits d'arrivée coïncidait avec la valeur nominale prévue.

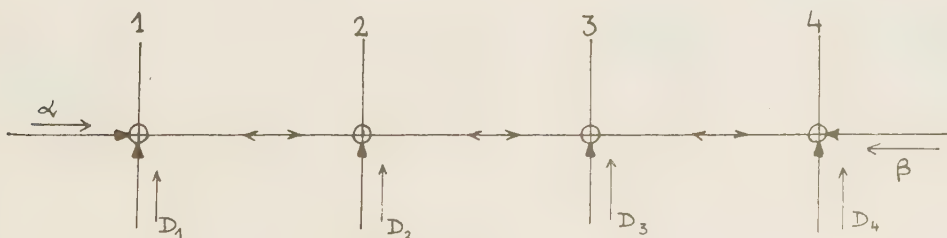


Fig. 3.8

On note :

α, β les débits moyens d'arrivée dans le réseau,

D_1 , les débits moyens d'arrivée sur les voies latérales.

La dimension du vecteur d'état est ici 28, celle du vecteur de commande

4.

Après avoir calculé hors ligne la matrice de bouclage S telle que :

$$\underline{u}_t^* = S \Delta \underline{X}_t,$$

On effectue une simulation du système régulé sur ces quatre carrefours en ligne (fig. 3.9). L'évolution des états simulés obéit à l'équation :

$$\Delta \underline{X}_{t+1} = \phi' \Delta \underline{X}_t + H \underline{u}_t + \underline{\gamma}'_t$$

où $\underline{\gamma}'_t$ est le vecteur perturbation que l'on fera varier. La période d'optimisation est prise égale à 5 cycles.

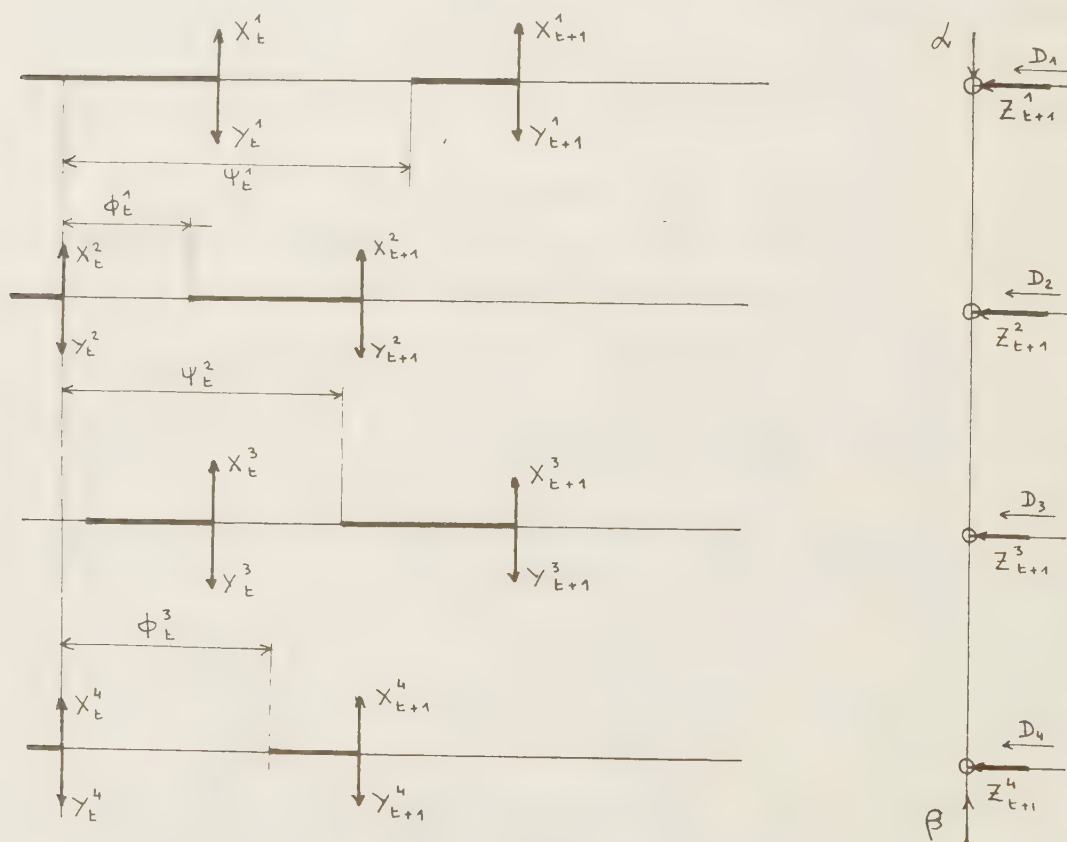


Fig. 3.9

Les courbes suivantes (fig. 3.10-a, 3.10-b) montrent l'évolution des états et des commandes du système autour du point de fonctionnement défini par :

- durée de cycle : $c = 100 \text{ sec}$
- durée du vert commun : $V^* = 50 \text{ sec}$
- débits nominaux : $\alpha^* = \beta^* = 0,325 \text{ véh/s}$
 $D_i^* = 0,325 \text{ véh/s} \text{ (} i = 1,4 \text{)}$
- états nominaux : $X^{1*} = Y^{4*} = 15 \text{ véh}$
 $Z^{i*} = 15 \text{ véh} \text{ (} i = 1,4 \text{)}$
 $X^{i*} \text{ (} i = 2,4 \text{)} = 18 \text{ véh}$
 $Y^{i*} \text{ (} i = 1,3 \text{)} = 18 \text{ véh}$

lorsqu'intervient une perturbation sur le débit d'arrivée $\beta (\Delta\beta = + 0,15 \text{ véh./s})$. Ces courbes concernent deux types de commandes :

- A temps fixe (fig. 3.10-a) : on distingue nettement la propagation de la perturbation le long de l'axe et on doit noter que les états X_t^i, Y_t^i n'en sont pas affectés. Le temps de réponse du système (instant où l'effet de la perturbation a disparu sur le carrefour n°1) est de l'ordre de 12 cycles.

- En boucle fermée (fig. 3.10-b) :

On remarque le caractère prédictif de la commande optimale, qui contre-carre immédiatement la perturbation $\Delta\beta$; le carrefour n°4, carrefour qui reçoit cette perturbation, voit sa durée de vert réduite (on n'accepte en effet dans le réseau qu'un nombre limité de véhicules pour éviter de trop surcharger les carrefours voisins) tandis que les autres commandes tendent à évacuer le plus possible les carrefours n° 1, 2 et 3, prévenant ainsi l'arrivée de la perturbation.

Les amplitudes des longueurs de queue ont sensiblement diminué par rapport à celles de la régulation à temps fixe, ce qui permet d'éviter une situation de congestion le long de l'axe.

Remarquons encore que le temps de réponse du système bouclé est, dans cet exemple, peu différent de celui du système en boucle ouverte ; ceci s'explique grâce aux deux remarques suivantes :

- l'effet de la perturbation sur le carrefour n°4 se fait sentir plus longtemps à cause de la diminution du vert,

- une commande trop énergique ne peut se produire à cause de la nature même du système ; en effet, une forte augmentation du vert sur une voie diminue considérablement les longueurs de queue de cette voie, mais augmente en contrepartie les longueurs de queue des voies adverses du même carrefour.

Pour observer l'effet d'un temps de réponse plus court, on a simulé, fig. 3.10-c, la commande optimale de ce réseau lorsque certaines longueurs de queue sont privilégiées (Y_t^i dans cet exemple). On remarque que le système réagit de façon énergique pour contrecarrer la perturbation $\Delta\beta$, ce qui a pour effet de maintenir pratiquement nuls les états concernés.

Le temps de réponse du système, qui était de l'ordre de 12 cycles dans l'exemple précédent est maintenant de 2 cycles sur les voies privilégiées.

On présente en annexe 3 le programme FORTRAN de calcul de la matrice de bouclage S et de la simulation ; ce programme occupe environ 40 K octets sur IBM 370-135 et son temps d'exécution est de l'ordre de 5 mn.

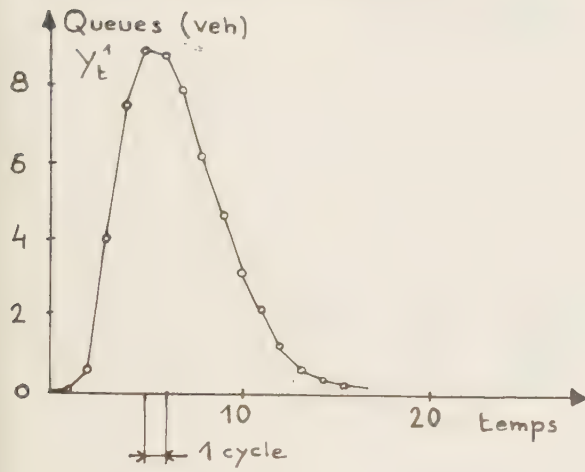
CONCLUSION

On a résolu, dans ce chapitre, le problème de la commande optimale des feux d'un réseau et on y a présenté une simulation du système de commande obtenu sur un axe de quatre carrefours en ligne.

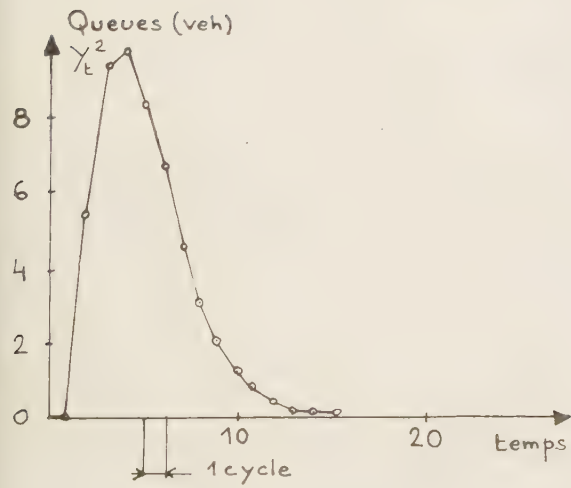
Les résultats ont montré que ce mode de contrôle du trafic était intéressant à cause notamment du caractère prédictif des grandeurs de commande, de sa grande souplesse d'emploi et de son caractère vraiment temps réel.

Cependant, l'implantation d'un tel système présente certaines difficultés pratiques :

- Boucle ouverte -



Carrefour n°1 (aval)



Carrefour n°2

- Boucle fermée -

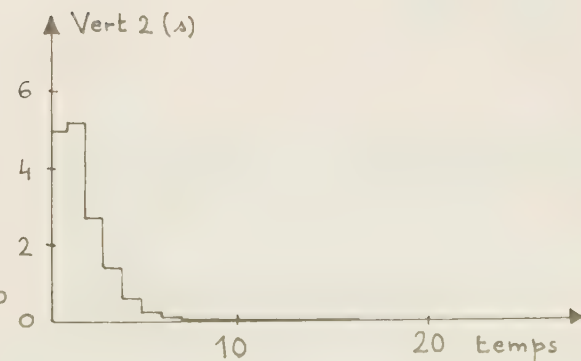
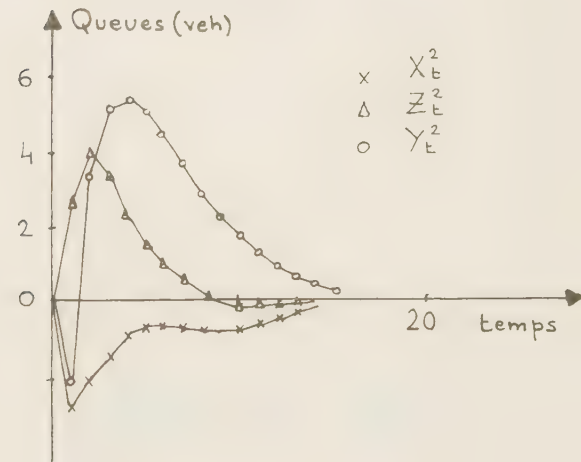
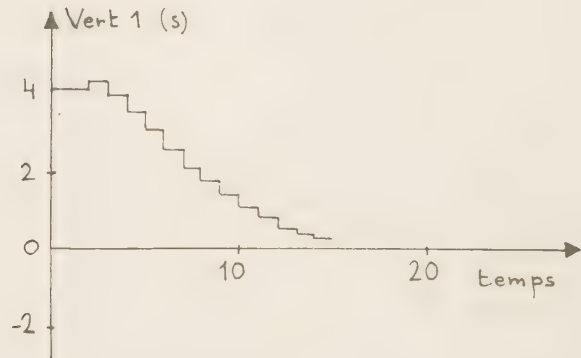
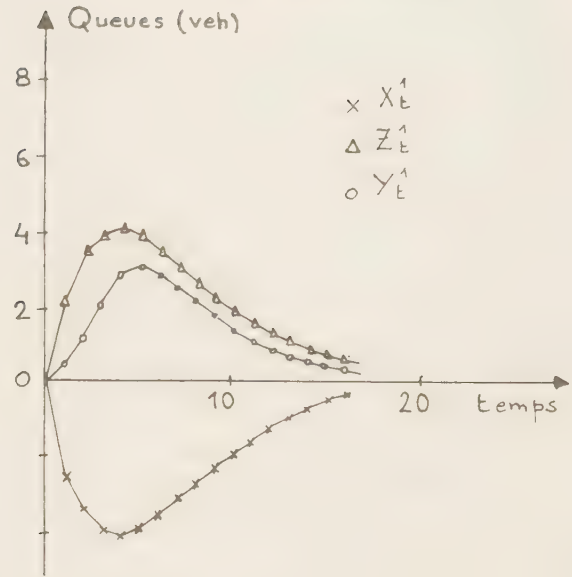
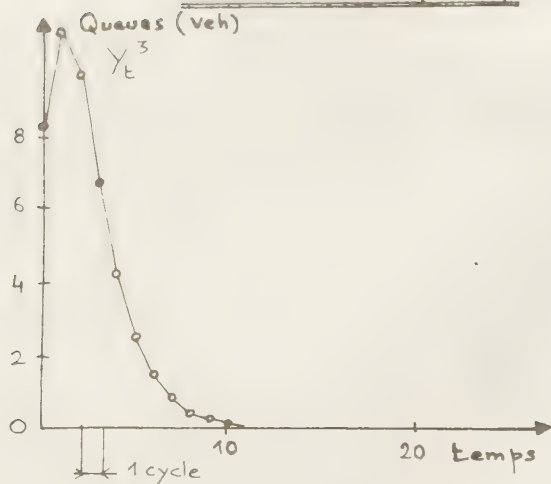


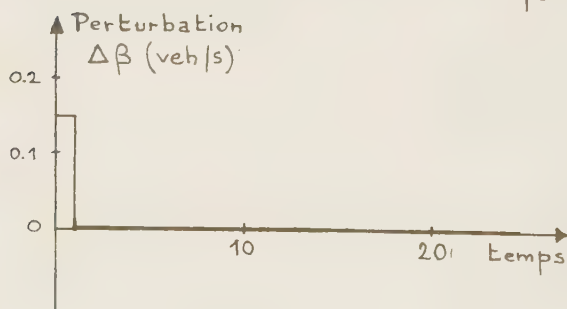
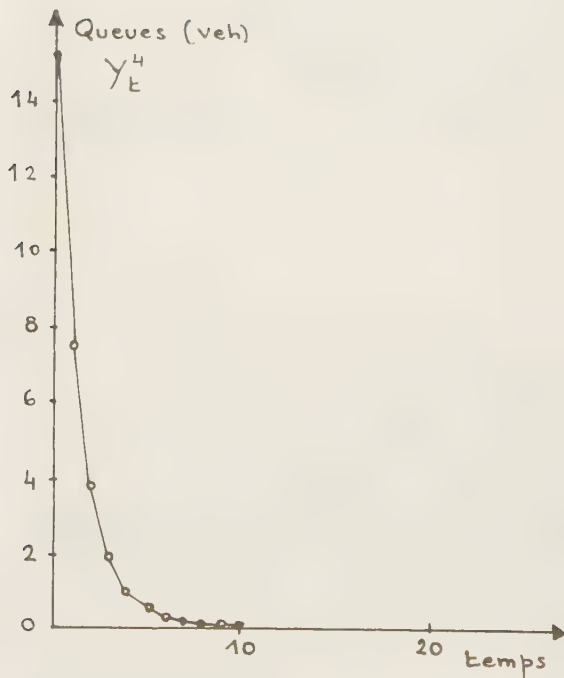
Fig. 3.10-a

Fig. 3.10-b

Boucle ouverte (suite)



Carrefour n°3



Carrefour n°4 (amont)

Fig. 3.10-a

Boucle fermée (suite)

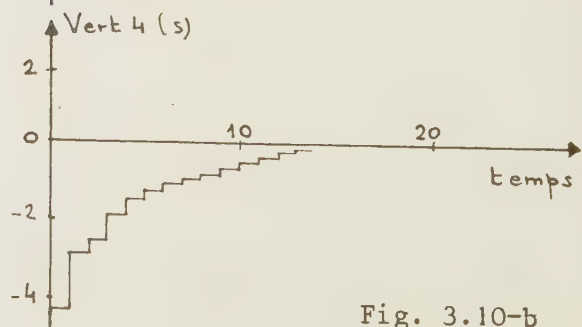
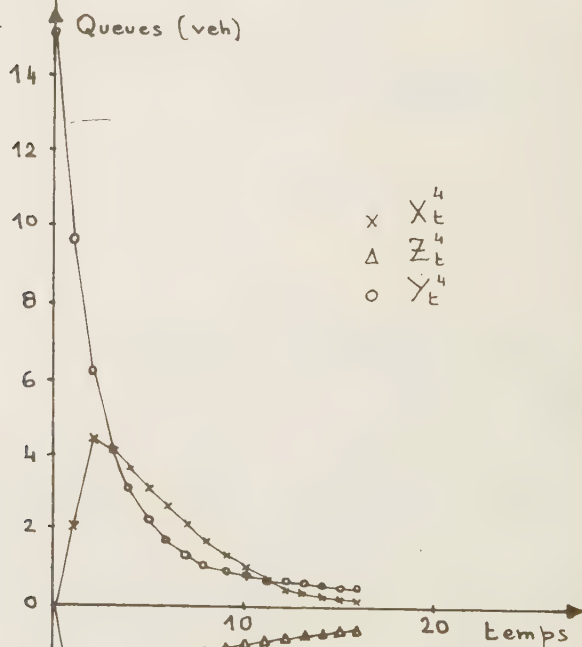
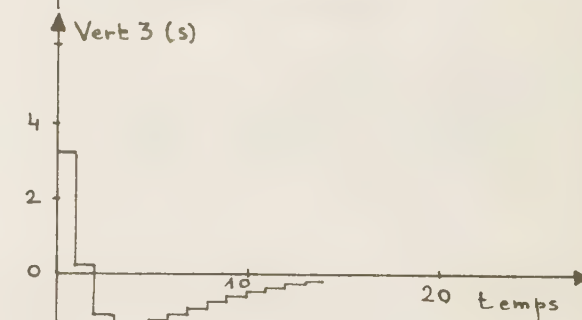
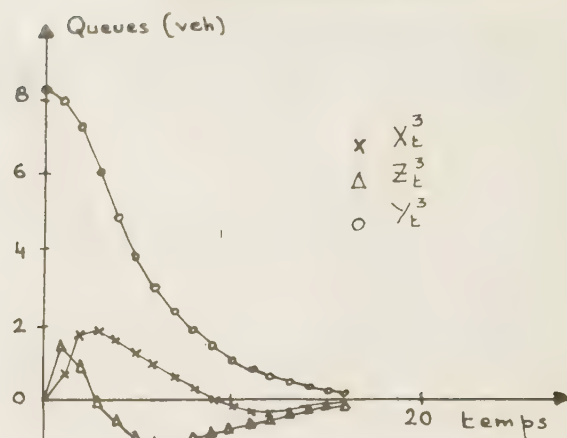
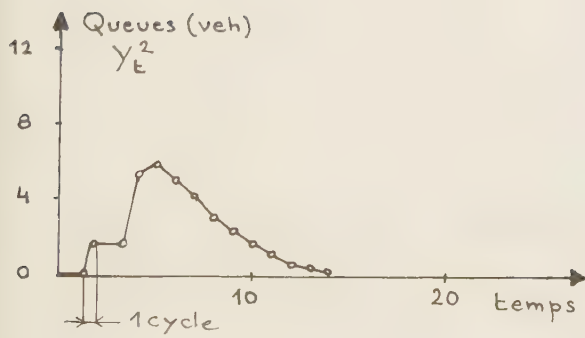
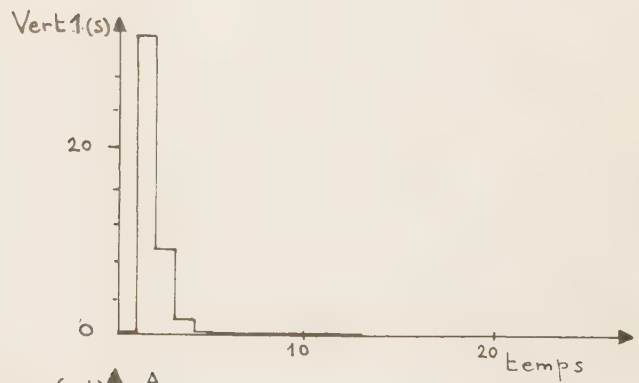
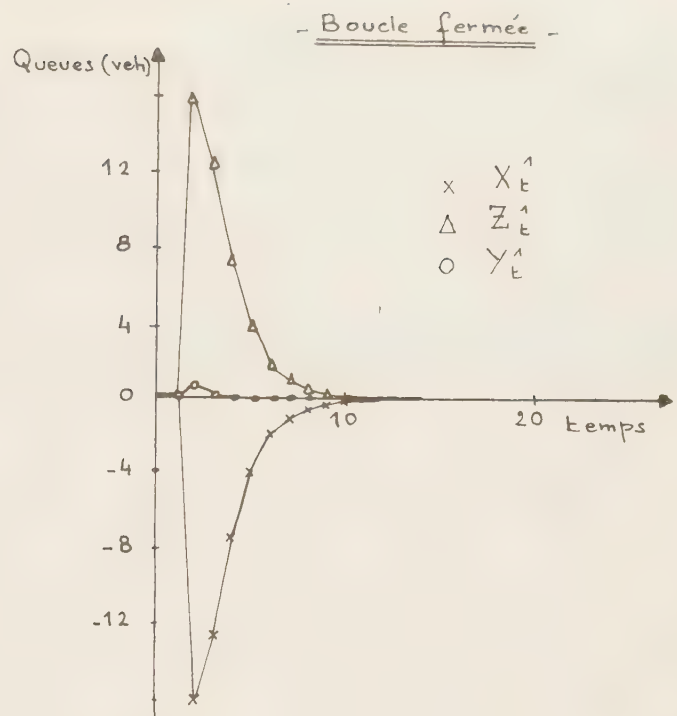
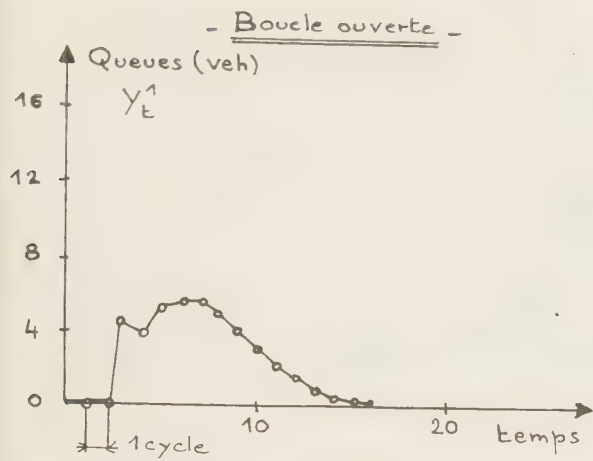


Fig. 3.10-b



Carrefour n°2

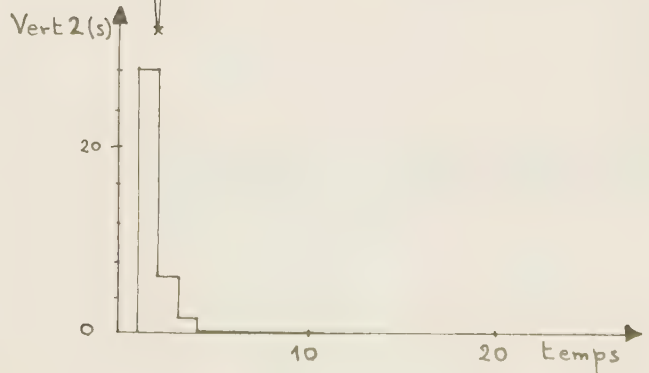
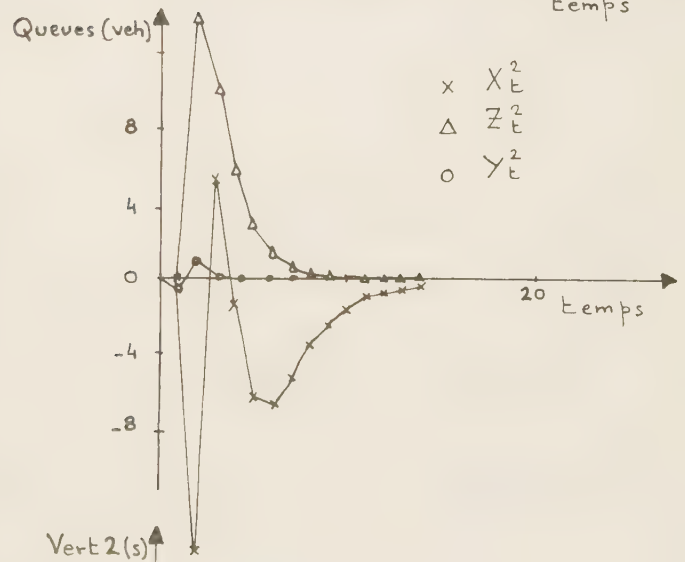
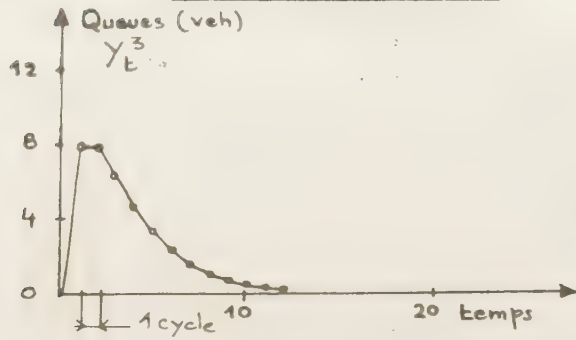


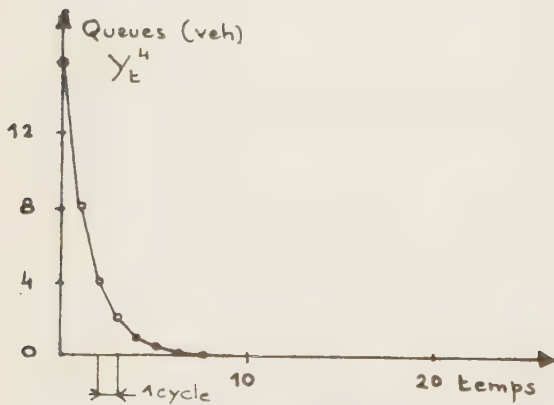
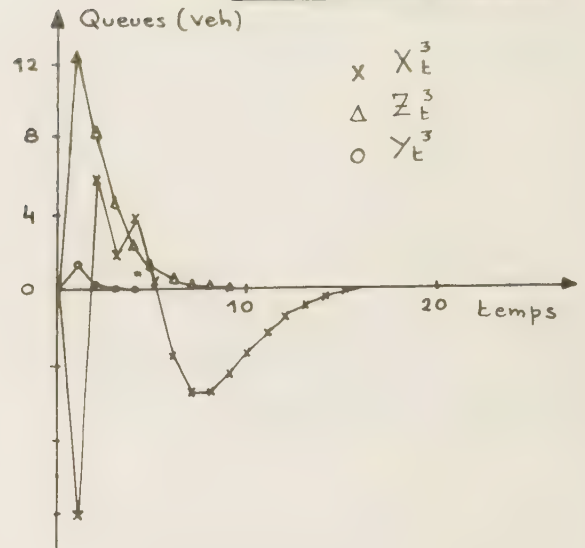
Fig. 3.10-c

Boucle ouverte (suite)

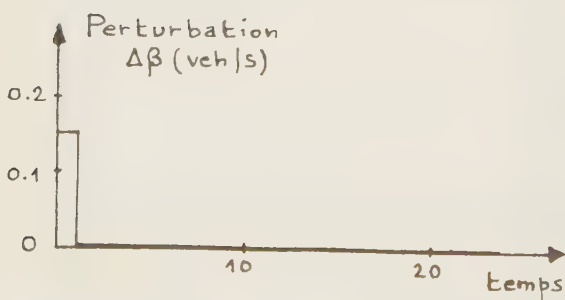
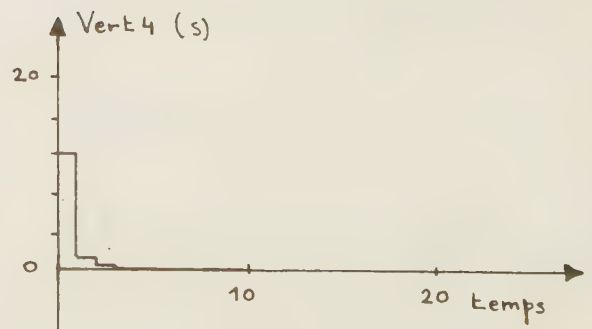
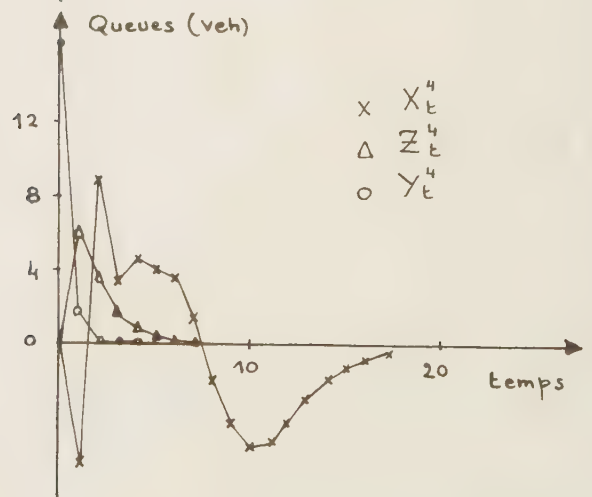
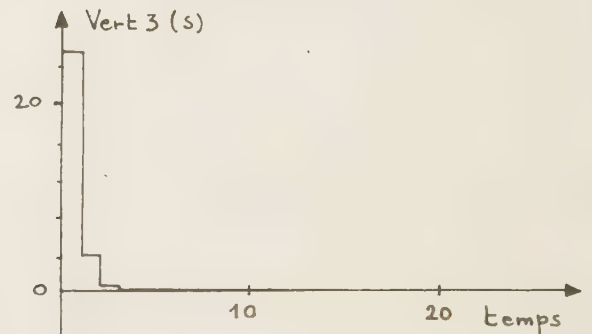


Carrefour n° 3

Boucle fermée (suite)



Carrefour n° 4 (amont)



- D'abord le calcul hors ligne des coefficients de la matrice de bouclage S , réalisable aisément si le nombre de carrefours régulés n'est pas trop élevé, s'avère très lourd dans le cas général. En effet, l'étude d'un réseau comprenant 20 carrefours nous conduirait à traiter hors-ligne des matrices de dimension 140 ; l'intégration de l'équation de RICATTI avec de telles matrices poserait des problèmes de calcul certains.

- Le calcul en ligne des éléments de régulation doit être réalisable sur un mini-calculateur fonctionnant en temps réel sur site ; il est donc important de réduire le plus possible le temps de la partie "calcul des commandes". L'obtention des commandes d'un réseau de 20 carrefours nécessiterait déjà 1000 multiplications, ce qui peut conduire à un temps de calcul excessif.

- Enfin, le fonctionnement du système doit être assuré même en cas de défaillance des éléments de mesure ; c'est le problème de la sécurité qui est ainsi posé et qui n'est pas résolu, pour l'instant, par la méthode ci-dessus.

Afin de répondre à ces trois problèmes de mise en oeuvre, nous proposons dans le chapitre 3 :

- une méthode de commande sous-optimale d'un réseau capable de résoudre les deux premiers problèmes, c'est à dire de réduire le nombre de calculs à effectuer hors ligne et de restreindre la partie temps de calcul des commandes en ligne,

- une structure hiérarchisée au niveau de l'implantation sur site des algorithmes de commande capable de résoudre, du moins en partie, les problèmes de sécurité de fonctionnement.

Chapitre 3

PROPOSITIONS POUR UNE APPLICATION EN LIGNE

Le chapitre précédent a montré que la loi de commande optimale du système global de quatre carrefours en ligne était :

$$\underline{u}_t^* = S \underline{\Delta X}_t$$

L'examen de la matrice S de bouclage montre que cette commande dépend pratiquement de tous les états du système (20 dans l'exemple traité) ; cependant, certains termes de couplage sont faibles et influent peu sur le comportement dynamique du système. La méthode qui suit consiste à trouver une nouvelle matrice de bouclage S' telle que :

$$\underline{u}_t = S' \underline{\Delta X}_t$$

dans laquelle seraient supprimés les termes négligeables, et qui conduirait à un volume de calcul acceptable pour une implantation en ligne.

3.1 - CALCUL D'UNE COMMANDE SOUS OPTIMALE

Une manière de résoudre ce problème est d'annuler les éléments des matrices Φ' , H, Q et R qui fournissent les faibles termes de couplage, donc de partitionner le système global en deux ou plusieurs sous-systèmes découplés ; le calcul de la commande optimale de chaque sous-système pourra être envisagé simplement et leur assemblage conduira à une commande sous-optimale du système global.

La méthode utilisée [12] est exposée ci-dessous sur l'exemple d'un système du 3ème ordre.

Soit le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

où z_i ($i = 1, 3$) sont les états et v_i ($i = 1, 2$) les commandes.

On désire calculer le couple (v_1, v_2) qui minimise le critère J :

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{z}^T Q \underline{z} + \underline{v}^T R \underline{v}) dt$$

où les matrices Q et R ont été choisies égales à la matrice unité.

La structure des équations d'état nous montre que la commande v_1 affecte principalement les états z_1 et z_2 , alors que la commande v_2 affecte les états z_2 et z_3 . Nous sommes alors conduits à définir les deux sous-systèmes suivants :

1er sous-système :

L'équation d'état est :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

Le critère d'optimisation est :

$$J_1 = \int_0^{\infty} (\underline{z}_1^T Q_1 \underline{z}_1 + \underline{v}_1^T R_1 \underline{v}_1) dt$$

avec : $\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ le vecteur d'état du sous-système 1,

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_1 = \text{II matrice unité}$$

2ème sous-système :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{32} \end{bmatrix} v_2$$

Le critère J_2 étant : $J_2 = \int_0^{\infty} (\underline{z}_2^T Q_2 \underline{z}_2 + \underline{v}_2^T R_2 \underline{v}_2) dt$

avec $\underline{z}_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ le vecteur d'état du sous-système 2,

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \text{II matrice unité}$$

Remarquons dès maintenant que certains éléments des matrices Q_i ont été divisés par 2 pour que l'état z_2 en recouvrement ne soit pas doublement pénalisé.

Les méthodes d'optimisation quadratique appliquées à ces deux sous-systèmes conduisent à des lois de commande de la forme :

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{pour le 1er sous-système} \\ v_2 &= \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{pour le 2ème sous-système} \end{aligned}$$

Ce sont ces deux expressions qui seront retenues pour le calcul de la commande du système global qui deviendra :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

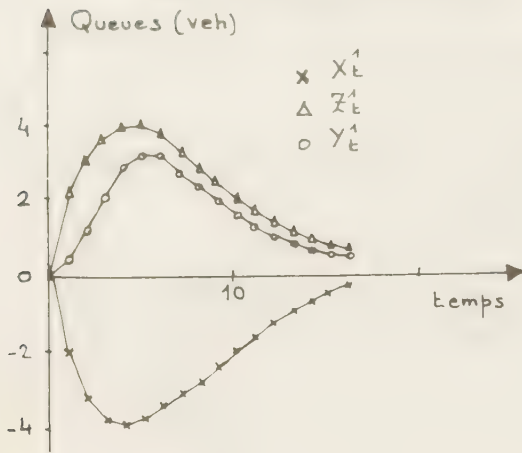
La nouvelle matrice de bouclage obtenue permet de calculer une loi de commande sous-optimale (les auteurs [12] proposent une estimation de la dégradation du critère) dont chacune des composantes peut être obtenue grâce à un nombre limité d'états.

La décomposition en sous-systèmes est possible grâce à la structure des matrices Φ' et H qui montre que chaque commande a une action relativement bien localisée. Dans le cas particulier de plusieurs carrefours en ligne, chaque commande n'affecte pratiquement que trois carrefours, ce qui nous a conduit à la décomposition du système global exposée en annexe 2.

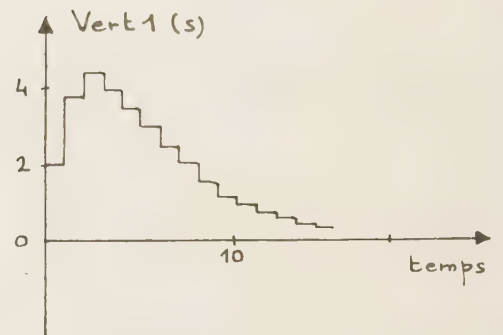
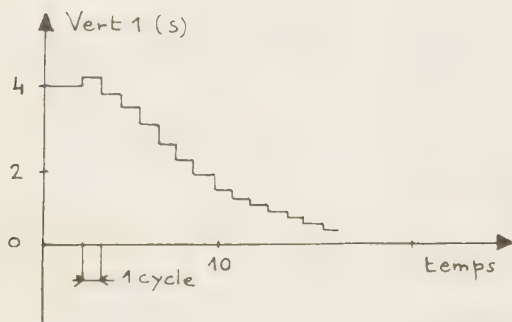
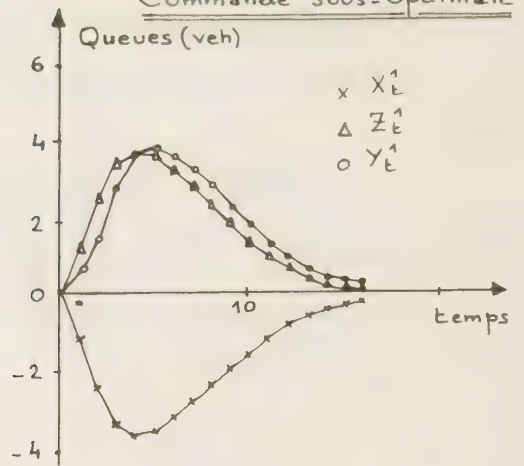
On a testé en simulation ce mode de commande sur l'exemple de quatre carrefours présenté en 2.2. Le calcul de chaque composante du vecteur de commande, qui nécessitait la connaissance de 20 états dans le cas du système global, est effectué maintenant à l'aide de 12 états et ce, quelle que soit la dimension initiale du système ; par exemple, l'étude d'un réseau de 10 carrefours nous conduit à traiter hors ligne des matrices de dimension 21 et le calcul en ligne du vecteur de commande ne fait plus intervenir que 120 multiplications.

Les courbes qui suivent (fig. 3.11) représentent l'évolution des états et des commandes sous-optimales, obtenues grâce à la méthode exposée ci-dessus.

Commande Optimale



Commande sous-optimale



Carrefour n° 1 (Aval)

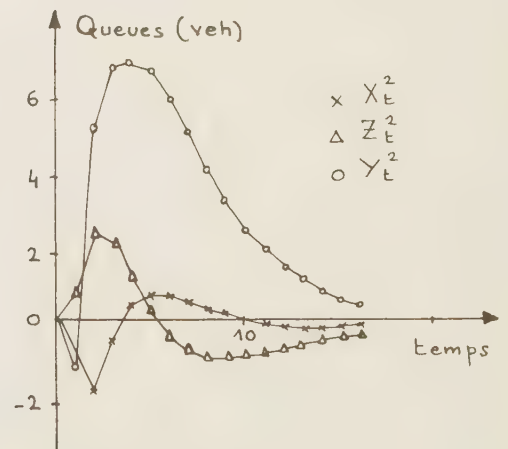
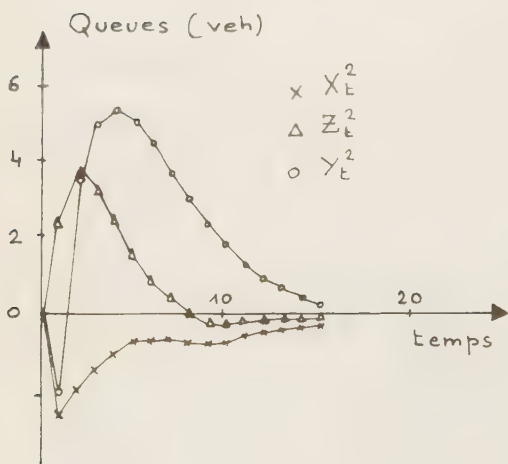
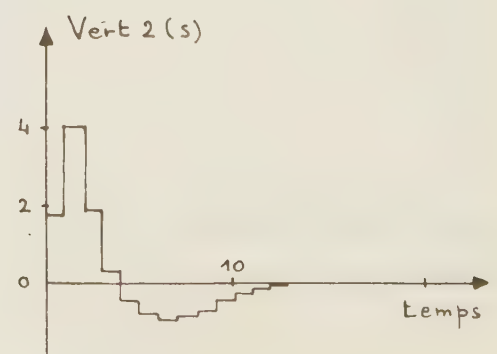
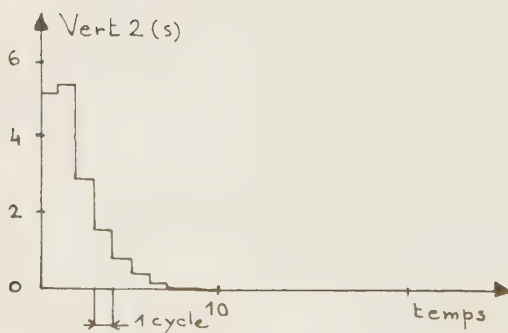
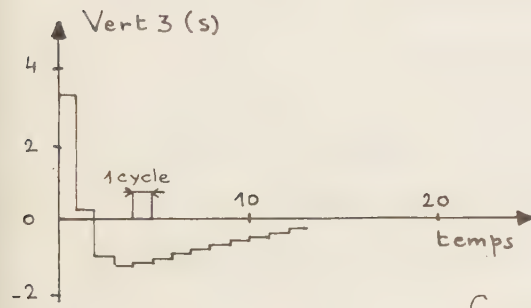
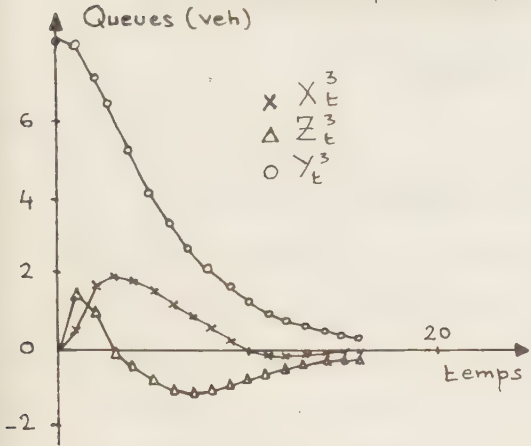


Fig. 3.11

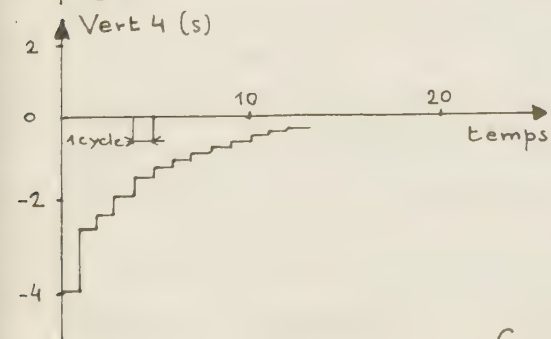
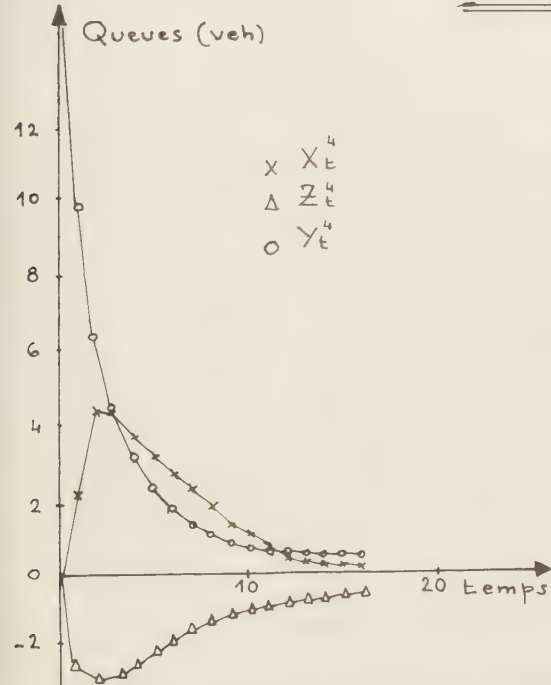


Carrefour n° 2

Commande Optimale (suite)

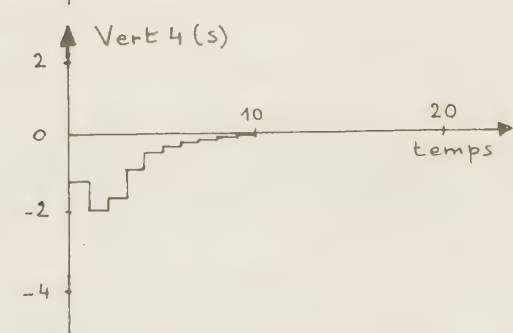
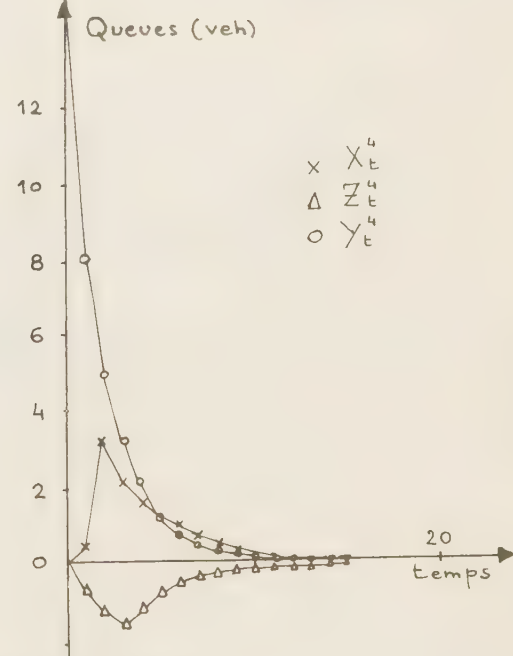
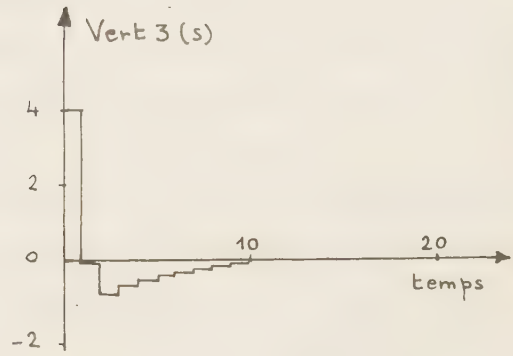
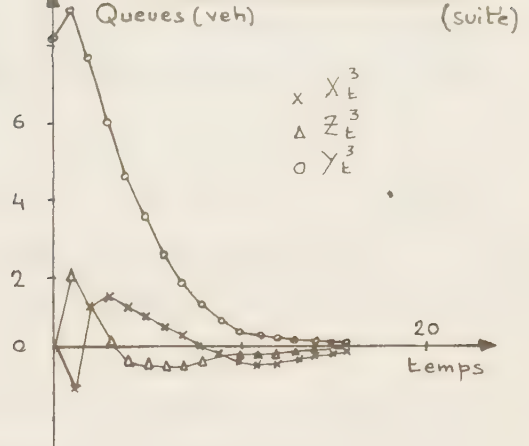


Carrefour n°3



Carrefour n°4 (amont)

Commande sous-optimale



On constate que la perturbation intervenant sur le carrefour n°4 à l'instant $t = 0$ influe peu sur les commandes des carrefours 3 et 4, ce qui est conforme à la structure de la nouvelle matrice de bouclage.

Les courbes de réponse du système aux perturbations sont très voisines de celles du système global, quoique légèrement plus oscillatoires.

Les sous-systèmes ainsi définis sont stables et le temps de réponse, précédemment défini, reste identique à celui du réseau global.

La méthode utilisée ici fournit donc une loi de commande intéressante si le nombre de carrefours est élevé ; elle consiste à décomposer le système global en sous-systèmes (3 carrefours dans notre application) et à calculer les commandes optimales de ces sous-systèmes pris isolément ; l'assemblage des résultats obtenus permet la commande du système global.

L'implantation de ce mode de commande en ligne se trouve facilitée grâce au nombre réduit de calculs à effectuer ; en effet, chaque composante du vecteur de commande est obtenue à partir de 12 états seulement, ceux-ci caractérisant le carrefour concerné et les deux carrefours voisins, comme le montre la fig. 3.12.

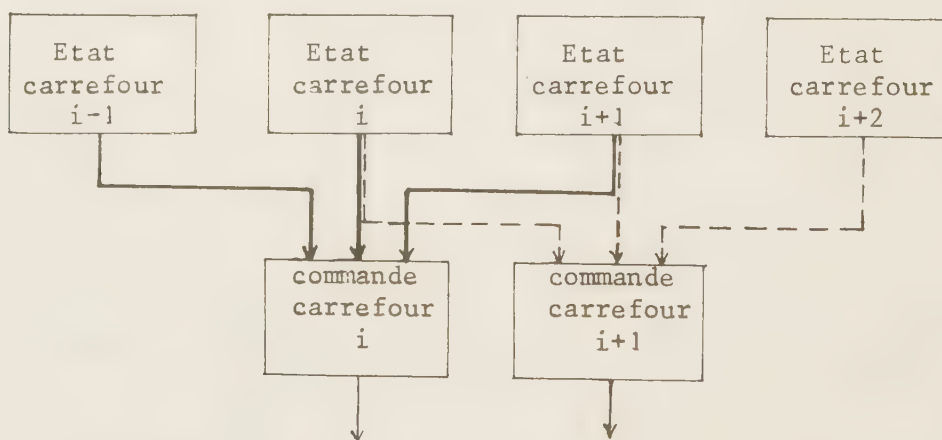


Fig. 3.12

On voit donc que la mesure des longueurs de queue d'un carrefour conditionne le fonctionnement du carrefour considéré et des deux carrefours voisins. Par conséquent, dès qu'une commande doit être manipulée extérieurement ou dès qu'une mesure vient à manquer (défaillance de capteurs), c'est le fonctionnement d'une bonne partie du réseau qui est compromis.

Un moyen d'éviter ces inconvénients est d'établir une structure de commande hiérarchisée à deux niveaux, c'est-à-dire de décomposer le système

global en sous-systèmes constitués d'un seul carrefour sur lesquels on établira une régulation locale capable d'assurer un fonctionnement acceptable en cas d'incidents.

3.2 - CALCUL D'UNE COMMANDE HIERARCHISEE [11]

Cette méthode consiste à fractionner le système de commande en deux niveaux selon le schéma de principe suivant (fig. 3.13).

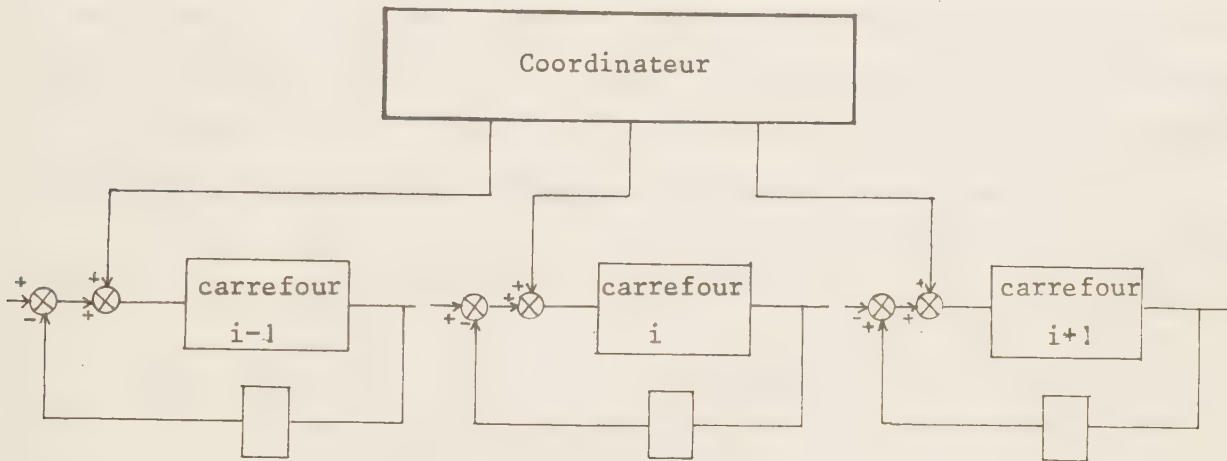


Fig. 3.13

3.2.1 - Position du problème

Soit le système régi par l'équation d'état :

$$\underline{X}_{t+1} = \Phi \underline{X}_t + H \underline{u}_t + \underline{Y}_t$$

où $\underline{X}_t$ est le vecteur d'état de dimension n

$\underline{u}_t$ le vecteur de commande de dimension m

$\underline{Y}_t$ le vecteur perturbation

et le critère J :

$$J = \sum_{i=t}^{t+N} (\underline{X}_i^T Q \underline{X}_i + \underline{u}_i^T R \underline{u}_i)$$

Dans notre cas particulier, la structure des matrices Φ , H , Q , R nous conduit à partitionner le système global en sous-systèmes élémentaires.

Prenons le cas de deux carrefours et écrivons l'équation d'état et le critère :

$$\underline{X}_{t+1} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{t+1}^1 \\ \underline{x}_{t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_t^1 \\ \underline{x}_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_t^1 \\ \underline{u}_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_t^1 \\ \underline{\gamma}_t^2 \end{bmatrix}$$

$$J = \sum_{i=t}^{t+N} \begin{bmatrix} \underline{x}_i^1 & \underline{x}_i^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_i^1 \\ \underline{x}_i^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{u}_i^1 & \underline{u}_i^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_i^1 \\ \underline{u}_i^2 \end{bmatrix}$$

où ϕ_{12} , ϕ_{21} , H_{12} , H_{21} sont les matrices d'interactions entre les deux sous-systèmes $S_1(\underline{x}^1, \underline{u}^1, \underline{\gamma}^1)$ et $S_2(\underline{x}^2, \underline{u}^2, \underline{\gamma}^2)$ et Q_{12} , Q_{21} , R_{21} , R_{12} sont les matrices d'interactions de critère.

Les matrices Q et R étant diagonales, ces dernières matrices sont nulles et on peut écrire :

$$J = J_1 + J_2 \quad \text{avec} \quad J_1 = \sum_t^{t+N} \left[\underline{x}_i^1 & \underline{x}_i^1 \right]^T \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_i^1 \\ \underline{x}_i^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{u}_i^1 & \underline{u}_i^1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_i^1 \\ \underline{u}_i^1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \sum_t^{t+N} \left[\underline{x}_i^2 & \underline{x}_i^2 \right]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_i^2 \\ \underline{x}_i^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{u}_i^2 & \underline{u}_i^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_i^2 \\ \underline{u}_i^2 \end{bmatrix}$$

Les équations d'état deviennent :

$$\underline{x}_{t+1}^1 = \phi_{11} \underline{x}_t^1 + H_{11} \underline{u}_t^1 + \underline{\gamma}_t^1$$

$$\underline{x}_{t+1}^2 = \phi_{22} \underline{x}_t^2 + H_{22} \underline{u}_t^2 + \underline{\gamma}_t^2$$

où $\underline{\gamma}_t^1, \underline{\gamma}_t^2$ sont des pseudo-perturbations qui contiennent :

- les perturbations extérieures $\underline{\gamma}_t^1, \underline{\gamma}_t^2$
- les perturbations internes exercées par le système 1 sur le système 2 et inversement.

Leur expression est :

$$\underline{\gamma}_t^1 = \underline{\gamma}_t^1 + \phi_{12} \underline{x}_t^2 + H_{12} \underline{u}_t^2$$

$$\underline{\gamma}_t^2 = \underline{\gamma}_t^2 + \phi_{21} \underline{x}_t^1 + H_{21} \underline{u}_t^1$$

3.2.2 - Optimisation des sous systèmes

Si on suppose que les interactions entre les sous-systèmes sont nulles, on peut résoudre les problèmes d'optimisation de la même façon que pour le problème global (3.1)

"Déterminer $\underline{u}_t^i$ qui minimise le critère :

$$J_i = \sum_{j=t}^{t+N} (\underline{x}_j^i Q_{ii} \underline{x}_j^i + \underline{u}_j^i R_{ii} \underline{u}_j^i)$$

compte-tenu de l'équation d'état :

$$\underline{x}_{t+1}^i = \phi_{ii} \underline{x}_t^i + H_{ii} \underline{u}_t^i + \underline{\gamma}_t^i$$

La solution de ce problème est la suivante (cf 3.1)

$$\underline{u}_t^i = S_{ii} \underline{x}_t^i + \underline{G}_i \quad \text{le vecteur de commande.}$$

avec

$$S_{ii} = - (R_{ii} + H_{ii}^T \alpha_i H_{ii})^{-1} H_{ii}^T \alpha_i \phi_{ii}$$

$$\underline{G}_i = - (R_{ii} + H_{ii}^T \alpha_i H_{ii})^{-1} H_{ii}^T (\alpha_i \underline{\gamma}_t^i - \underline{\beta}_i)$$

Les matrices α_i , $\underline{\beta}_i$ étant obtenues en intégrant à rebours les équations :

$$\alpha_t = \phi_{ii}^T \alpha_{t+1} \left[1 - H_{ii} (R_{ii} + H_{ii}^T \alpha_{t+1} H_{ii})^{-1} H_{ii}^T \alpha_{t+1} \right] \phi_{ii} + Q_{ii}$$

$$\underline{\beta}_t = \phi_{ii}^T \left[-1 + \alpha_{t+1} H_{ii} (R_{ii} + H_{ii}^T \alpha_{t+1} H_{ii})^{-1} H_{ii}^T \right] (\alpha_{t+1} \underline{\gamma}_t^i - \underline{\beta}_{t+1})$$

$$\alpha_N = Q \text{ et } \underline{\beta}_N = \underline{0}$$

La coordination se traduira par l'addition à ce $\underline{u}_t^i$ d'une commande de coordination $\underline{h}_i$ selon le schéma :

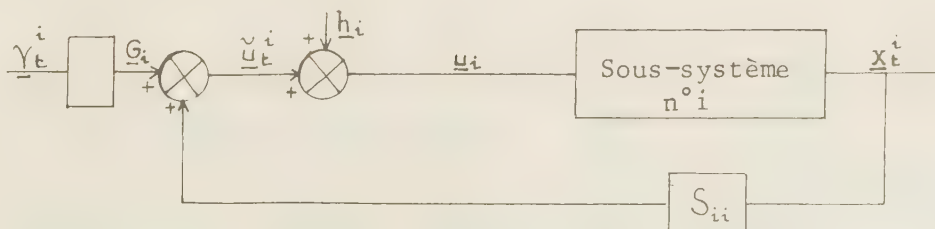


Fig. 3.14

3.2.3 - Commande de coordination

$\underline{u}_t^i$ étant le vecteur de commande optimale du sous-système n°i, il est facile de calculer son expression à l'aide de |1|

$$\underline{u}_t = \begin{bmatrix} \underline{u}_t^1 \\ \underline{u}_t^2 \end{bmatrix} = S \underline{x}_t + \underline{G} = \begin{bmatrix} S^1 & S^{12} \\ S^{21} & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_t^1 \\ \underline{x}_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{G}'_1 \\ \underline{G}'_2 \end{bmatrix}$$

soit :

$$|2| \quad \underline{u}_t^1 = S^1 \underline{x}_t^1 + \underline{G}'_1 + S^{12} \underline{x}_t^2$$

$$|3| \quad \underline{u}_t^2 = S^2 \underline{x}_t^2 + \underline{G}'_2 + S^{21} \underline{x}_t^1$$

Or, d'après la figure 3.14, la commande de coordination $\underline{h}_i$ est telle que :

$$\underline{u}_t^i = \underline{\tilde{u}}_t^i + \underline{h}_i$$

et peut s'expliciter grâce à |2| et à |3|

$$\underline{h}_i = (S^i - S_{ii}) \underline{x}_t^i + (\underline{G}'_i - \underline{G}_i) + S^{ij} \underline{x}_t^j$$

Les deux premiers termes imposent des modifications locales, le troisième concerne les interactions des autres systèmes j sur le sous-système i.

3.2.4 - Application à la commande d'un réseau quelconque

On a vu (cf 3.1) qu'un réseau comprenant un nombre quelconque de carrefours n pouvait être partitionné en (n-2) sous-systèmes (annexe 2) régis par l'équation d'état :

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_{t+1}^{i-1} \\ \underline{z}_{t+1}^i \\ \underline{z}_{t+1}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i^{11} & \phi_i^{12} & \phi_i^{13} \\ \phi_i^{21} & \phi_i^{22} & \phi_i^{23} \\ \phi_i^{31} & \phi_i^{32} & \phi_i^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_t^{i-1} \\ \underline{z}_t^i \\ \underline{z}_t^{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{bmatrix} \underline{u}_t^i$$

où $\underline{z}_t^i$ est le vecteur d'état du carrefour n°i de dimension 7,

$\underline{u}_t^i$ le vecteur de commande (scalaire dans le cas général, de dimension 2 pour les carrefours extrémités)

On a calculé la commande $\underline{u}_t^i$ (3.1) qui minimisait le critère J :

$$J = \sum_t^{t+N} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{z}_t^{i-1} & \underline{z}_t^i & \underline{z}_t^{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q^i & 0 \\ 0 & 0 & Q^{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_t^{i-1} \\ \underline{z}_t^i \\ \underline{z}_t^{i+1} \end{bmatrix} + \underline{u}_t^{iT} R^i \underline{u}_t^i \right\}$$

où les matrices Q^i , Q^{i+1} , Q^{i-1} , R^i sont diagonales.

La solution de ce problème d'optimisation quadratique a conduit à une expression de la forme :

$$\underline{u}_t^i = \begin{bmatrix} S^{i-1} & S^i & S^{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_t^{i-1} \\ \underline{z}_t^i \\ \underline{z}_t^{i+1} \end{bmatrix}$$

La structure de la matrice $\{\phi_i^{ij}\}$ qui comprend peu de termes de couplage et celle de la matrice $\{H^i\}$ nous incite à ne considérer, au niveau local, que le carrefour n°i, dont le fonctionnement est régi par l'équation d'état :

$$\underline{z}_{t+1}^i = \phi_i^{22} \underline{z}_t^i + H^2 \underline{u}_t^i$$

Le calcul de la commande optimale $\underline{u}_t^i$ qui minimise le critère :

$$J_i = \sum_t^{t+N} \left\{ \underline{z}_t^{iT} Q^i \underline{z}_t^i + \underline{u}_t^{iT} R^i \underline{u}_t^i \right\}$$

conduit à l'expression :

$$\underline{u}_t^i = S^{ii} \underline{z}_t^i$$

Conformément au schéma de coordination de la figure 3.36, la commande $\underline{h}_t^i$ s'obtiendra simplement ; en effet :

$$\underline{u}_t^i = \underline{u}_t^i + \underline{h}_t^i \Rightarrow \underline{h}_t^i = (S^i - S^{ii}) \underline{z}_t^i + S^{i-1} \underline{z}_t^{i-1} + S^{i+1} \underline{z}_t^{i+1}$$

On montre figure 3.15 le schéma général de la commande d'un réseau quelconque selon les principes développés dans les deux paragraphes précédents. Comme l'indique clairement cette figure, l'absence de mesure sur l'un quelconque des carrefours (i) se traduira par l'absence de commandes de coordination pour les carrefours voisins i-1 et i+1 qui continueront cependant à fonctionner localement ; le carrefour i sera doté d'une commande manuelle on sera piloté par un contrôleur local à temps fixe.

Si cette hiérarchisation du système de commande ne réduit pas la masse de calculs à effectuer, elle permet néanmoins un fonctionnement plus efficace de l'ensemble en cas de défaillance de l'un quelconque des éléments de mesure.

3.2.5 - Application à l'exemple de quatre carrefours en ligne

La décomposition du système global en sous-systèmes (annexe 2) fait apparaître 4 carrefours particuliers, qui sont les carrefours extrémités ; en effet, ceux-ci sont affectés par un groupe de deux commandes et sont caractérisés par une équation d'état de la forme :

$$\begin{bmatrix} z_{t+1}^1 \\ z_{t+1}^2 \\ z_{t+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \\ z_t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \\ H^{31} & H^{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \end{bmatrix}$$

où les commandes u_t^1 et u_t^2 sont des scalaires.

L'optimisation globale de ce système par rapport au critère :

$$J = \sum_t^{t+N} \begin{bmatrix} z_t^1 & z_t^2 & z_t^3 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \\ z_t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t^1 & u_t^2 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \end{bmatrix}$$

conduit à une loi de commande :

$$\begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \\ z_t^3 \end{bmatrix}$$

Les matrices de couplages ϕ_{ij} ($i \neq j$) et H^{ij} ($i \neq j$) ne comprenant que très peu de termes non nuls, on définit les sous-systèmes locaux par :

COORDINATEUR

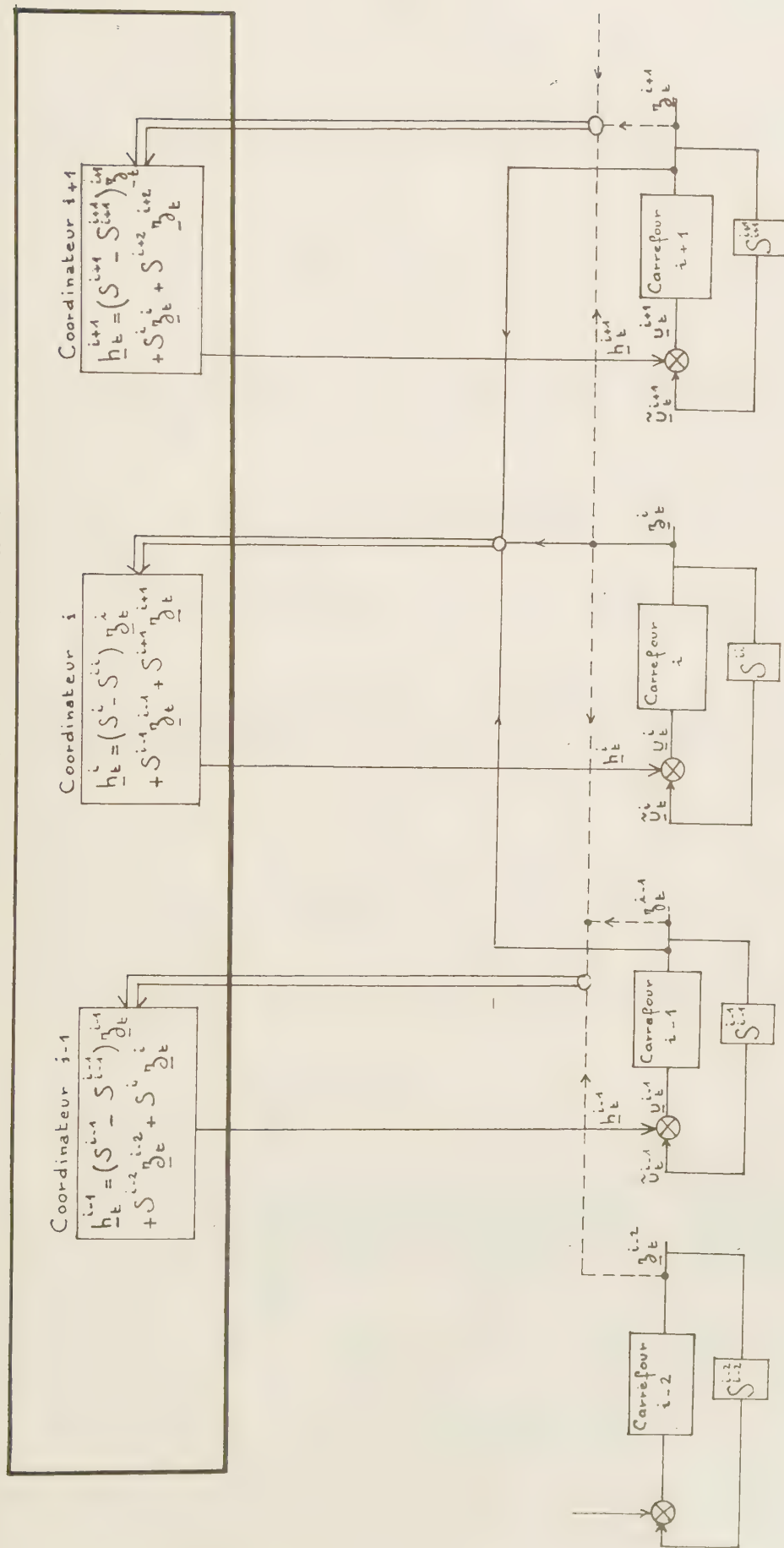


Fig. 3.15

Schéma de commande d'un réseau

$$\text{Carrefour n}^\circ 1 \quad \underline{z}_{t+1}^1 = \phi_{11} \underline{z}_t^1 + H^{11} u_t^1$$

$$\text{Carrefour n}^\circ 2 \quad \underline{z}_{t+1}^2 = \phi_{22} \underline{z}_t^2 + H^{22} u_t^2$$

L'optimisation de ces deux sous-systèmes conduit à une loi de commande de la forme :

$$\tilde{u}_t^1 = K^1 \underline{z}_t^1$$

$$\tilde{u}_t^2 = K^2 \underline{z}_t^2$$

Conformément au schéma de principe fig 3.1.4, les commandes de coordination h_t^1 et h_t^2 seront :

$$u_t^1 = \tilde{u}_t^1 + h_t^1 \Rightarrow h_t^1 = (K^{11} - K^1) \underline{z}_t^1 + K^{12} \underline{z}_t^2 + K^{13} \underline{z}_t^3$$

$$u_t^2 = \tilde{u}_t^2 + h_t^2 \Rightarrow h_t^2 = K^{21} \underline{z}_t^1 + (K^{22} - K^2) \underline{z}_t^2 + K^{23} \underline{z}_t^3$$

L'application de cette méthode de commande à notre exemple de quatre carrefours en ligne est possible en simulation selon le schéma de principe suivant (Fig 3.16)

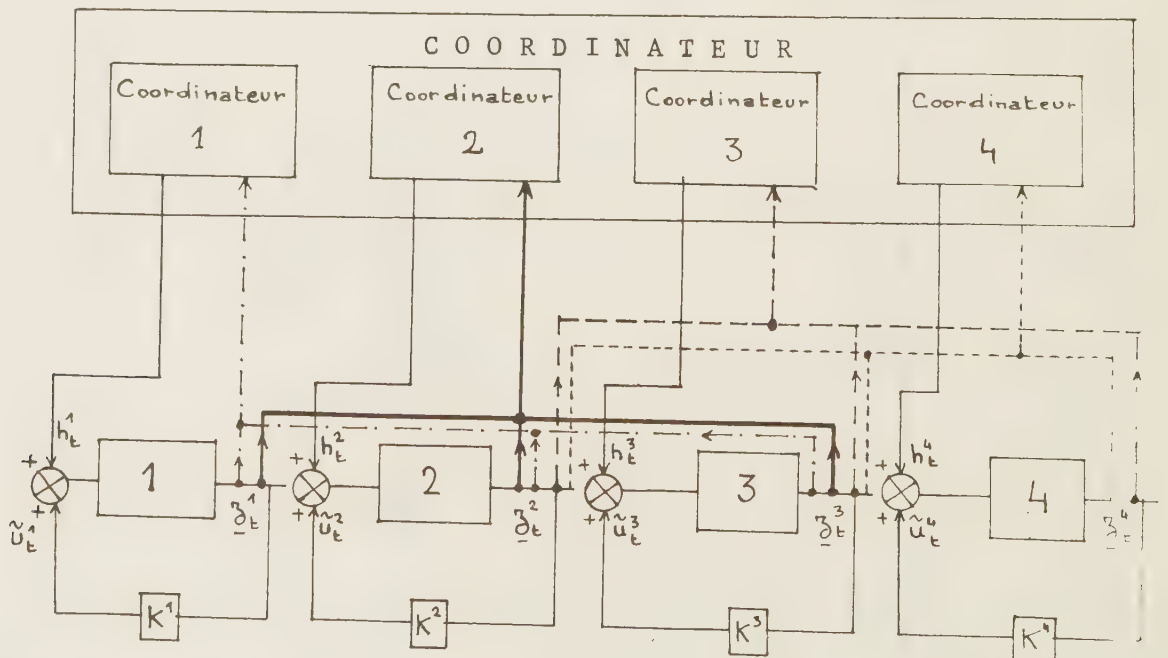


Fig. 3.16

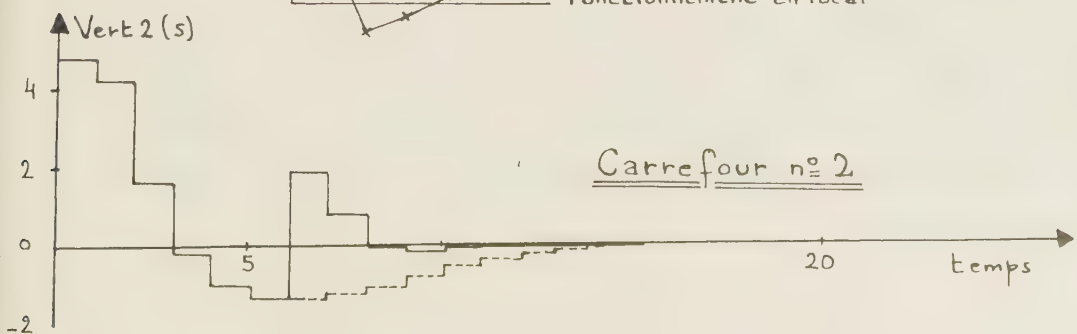
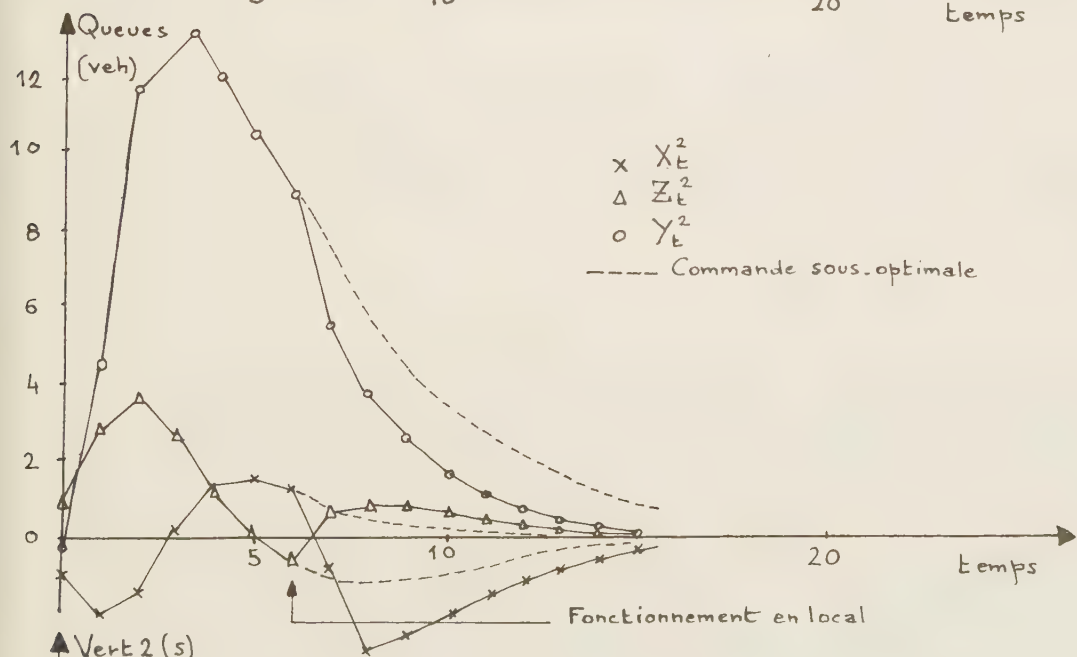
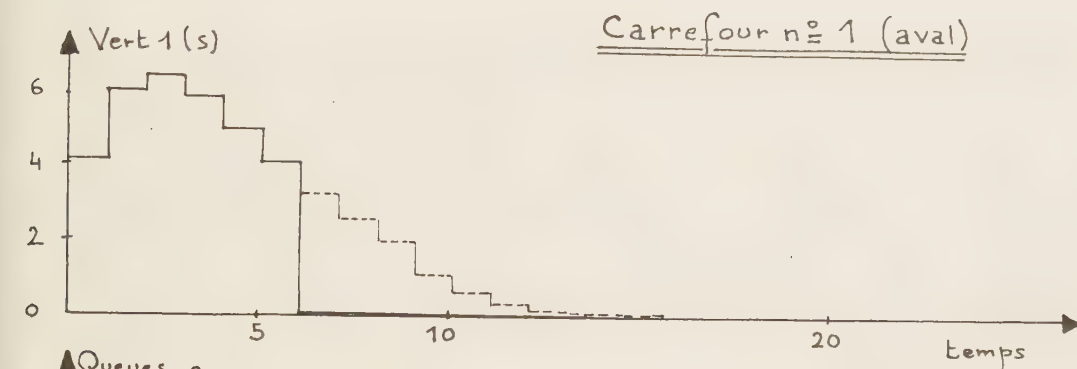
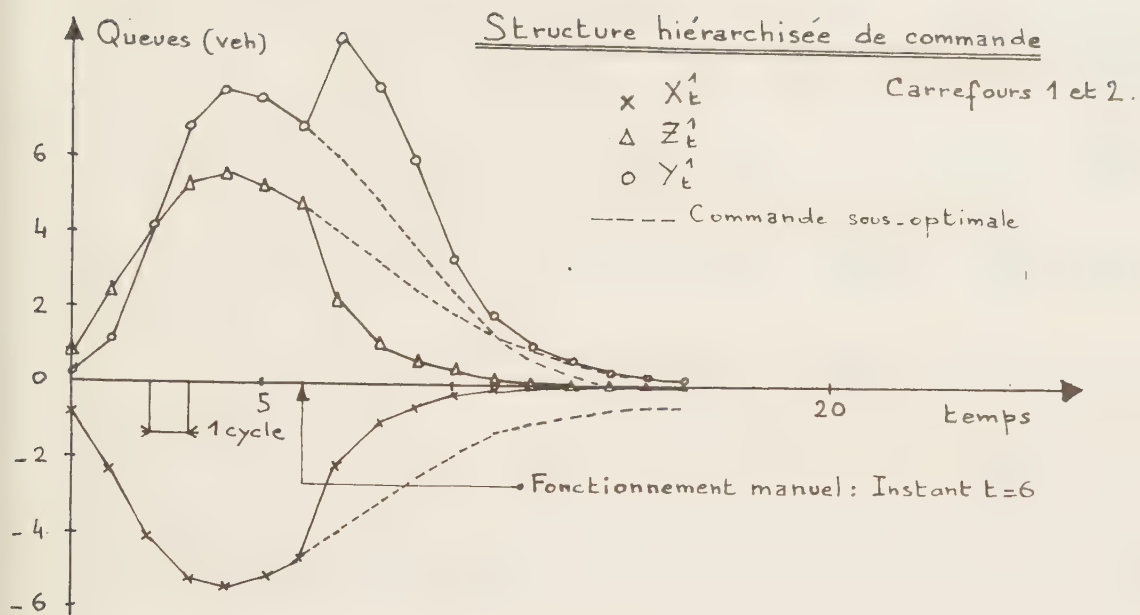


Fig. 3.17

Chaque carrefour possède un coordinateur qui effectue les opérations suivantes :

$$\text{Coordinateur 1 : } h_t^1 = (K^{11} - K^1) \underline{z}_t^1 + K^{12} \underline{z}_t^2 + K^{13} \underline{z}_t^3$$

$$\text{Coordinateur 2 : } h_t^2 = K^{21} \underline{z}_t^1 + (K^{22} - K^2) \underline{z}_t^2 + K^{23} \underline{z}_t^3$$

$$\text{Coordinateur 3 : } h_t^3 = K^{32} \underline{z}_t^2 + (K^{33} - K^3) \underline{z}_t^3 + K^{34} \underline{z}_t^4$$

$$\text{Coordinateur 4 : } h_t^4 = K^{42} \underline{z}_t^2 + K^{43} \underline{z}_t^3 + (K^{44} - K^4) \underline{z}_t^4$$

Après avoir calculé hors ligne les matrices K^1, K^2, K^3, K^4 , on détermine les coefficients des régulateurs locaux et des coordinateurs, puis on teste en simulation l'efficacité de cette méthode.

Les courbes suivantes, figure 3.17, représentent le comportement des états et des commandes en fonction du temps ; à l'instant $t = 6$, une absence de mesure survient sur le carrefour n°1, ce qui entraîne automatiquement la mise en commande manuelle de ce carrefour et la mise en régulation locale du carrefour n°2. Les mesures défaillantes n'affectant pas les carrefours 3 et 4, ceux-ci fonctionnent normalement.

Conclusion :

A l'aide du modèle d'état linéaire défini dans le chapitre 1, on a établi un système de commande en ligne des feux d'un réseau qui est optimal pour le critère :

$$J = \sum_{i=t}^{t+N} (\Delta \underline{X}_i^T Q \Delta \underline{X}_i + \underline{u}_i^T R \underline{u}_i)$$

où $\Delta \underline{X}_i$ et $\underline{u}_i$ représentent respectivement les variations du vecteur d'état (longueurs de queue) et du vecteur de commandes (verts) autour de valeurs nominales définies pour un point de fonctionnement choisi.

L'optimisation de ce critère (chap. 2) conduit à une commande en boucle fermée sur tous les états du réseau et ses performances dynamiques sont facilement modifiées par l'utilisateur en ajustant les coefficients des matrices Q et R du critère. Cependant, si la dimension du vecteur d'état est élevée, c'est-à-dire si le nombre de carrefours à réguler est grand, cette méthode d'optimisation globale devient difficilement applicable en ligne à cause du volume de calculs à effectuer.

C'est pourquoi on envisage dans ce chapitre une méthode de commande sous-optimale basée sur la décomposition du réseau initial en sous-systèmes et on calcule pour chacun d'eux une commande optimale pour un sous-critère de la même forme que le critère J ci-dessus. Le gros avantage de cette méthode est de réduire considérablement le nombre de calculs à effectuer en ligne tout en conservant l'allure générale et les caractéristiques principales des courbes de réponse.

Enfin, pour une plus grande sécurité de fonctionnement, le calcul de la commande s'effectue selon une structure hiérarchisée dans laquelle les décisions sont prises au niveau du carrefour seul (commande locale) et au niveau d'un coordinateur qui assure son inclusion dans l'ensemble du réseau. Cette structure permet un fonctionnement acceptable de l'ensemble malgré l'absence ou la défaillance éventuelle des éléments de mesure.

De nombreux problèmes restent cependant à résoudre tant du point de vue théorique que du point de vue pratique.

Sur le plan théorique, l'identification du système, c'est-à-dire la détermination des coefficients des matrices Φ' et H doit maintenant être envisagée grâce à des mesures sur site des longueurs de queue. Cette opération nous fournira un lot de matrices de bouclage déterminées chacune dans des conditions de trafic bien définies (choix des points de fonctionnement).

Les mesures effectuées sur site devraient permettre de choisir en ligne le point de fonctionnement le mieux adapté aux conditions réelles du trafic ; c'est le problème de la commutation entre les différents régimes qui est ainsi posé et qui doit être résolu lors des procédures de changement de cycle (états transitoires) et lors du changement des conditions de trafic.

Sur le plan pratique, la mesure des longueurs de queue développée dans la deuxième partie est possible grâce à l'implantation de capteurs constitués de boucles magnétiques. Le bon fonctionnement de l'ensemble nécessitant la connaissance de tous les états du système, on devra donc installer un grand nombre de capteurs (3 par carrefour au minimum).

Enfin, les problèmes de sécurité de fonctionnement, partiellement résolus grâce à la structure hiérarchisée des commandes, devront cependant être abordés d'une manière plus complète, notamment les problèmes de détection de panne de capteurs et les problèmes de commutation entre divers modes de fonctionnement (local, manuel, coordonné).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.G. SINGH "Hierarchical strategies for on-line control of Urban Road Traffic signals"
5th - IFIP Symposium - Rome 1973
- [2] M.G. SINGH "A Multilevel strategy for area traffic control"
University of Cambridge - 1971
- [3] MORGAN J.T., "Synchronizing traffic signals for maximum"
LITTLE J.D.C. Bandwith. Ops.Res. 12, (1964), 896-912
- [4] GARTNER, SHANI, "Computer-aided coordination strategy for traffic signal
BEN URI networks"
ler Symposium IFAC/IFIP Versailles 1970
- [5] KLIJZING P. "Traffic signal setting in large networks"
ler Symposium IFAC/IFIP Versailles 1970
- [6] INOSE H., "Theory of road traffic control based on macroscopic traffic
FUJISAKI H., model"
HAMADA T. Electronic letters, Vol. 3, N°8, August 1967
- [7] AZMI KAYA "Computer and optimization techniques for efficient utilization of urban free ways systems"
5th world IFAC Congress - PARIS 1972
- [8] CHANG A. Synchronisation of traffic signals a grid networks
I.B.M. Journal, Juillet 1967.
- [9] HILLIER J.A. "Glasgow experiment in area traffic control"
Traffic engineering and control. Décembre 65
- [10] S.E.R.C. Dispositifs électroniques adaptés à la gestion des infra-
structures routières et à la régulation du trafic.
- [11] CHENEVEAUX B. "Contribution à l'optimalisation hiérarchisée des systèmes
dynamiques"
Thèse de Docteur-Ingénieur - NANTES - Avril 1972
- [12] ISAKSEN et "Suboptimal control of linear systems by Augmentation with
PAYNE application to Freeway Traffic regulation"
I.E.E.E. Aut. Control, Vol. AC-18 n°3 pp.210-219, Juin 73
- [13] M. AOKI "Control of large-scale Dynamic systems by aggregation"
I.E.E.E. Aut. Control, Vol. AC-13 n°3 pp.246-253, Juin 68
- [14] S. MEDITCH "A class of suboptimal linear controls"
I.E.E.E. Tr. Aut. Control, Vol. AC-11 n°3 pp.433-439,
Juillet 1966.

CONCLUSION GENERALE

Bien que la conception et l'implantation d'un système de commande des feux de circulation n'apportent que des solutions partielles au problème général du trafic en zone urbaine, l'adoption et la mise en oeuvre de méthodes modernes de commande se trouvent amplement justifiées si, bien adaptées aux conditions réelles du trafic, elles contribuent à une amélioration sensible de la capacité et du rendement des infrastructures existantes.

C'est pourquoi, on développe dans ce mémoire des systèmes de commande qui, contrairement à la plupart des régulations existantes, assurent un fonctionnement temps réel du carrefour ou du réseau et s'adaptent aisément aux situations de congestion de plus en plus fréquentes au centre des villes.

D'abord, la commande des feux d'un carrefour isolé, fonctionnant à cycle fixe ou non, se réduit respectivement au calcul de la durée de vert, des durées de vert et de cycle qui minimisent un critère quadratique contenant l'ensemble des longueurs de queue présentes sur chaque voie d'accès, compte tenu de prévisions à court terme sur l'évolution de ces longueurs de queue et des débits d'arrivée. La structure en boucle fermée de la commande optimale obtenue assure un fonctionnement temps réel du carrefour, qui devient ainsi apte à répondre rapidement aux fluctuations imprévues du trafic.

La mise en oeuvre d'un tel système de commande ne nécessite que l'identification hors ligne de certains paramètres caractéristiques de l'intersection (débits de saturation, temps perdus par cycle) et le calcul préalable des coefficients caractérisant la boucle de commande.

L'application des algorithmes de commande obtenus (calcul des durées de vert et de cycle) à un carrefour réel nous a permis de mettre au point une méthode de mesure des longueurs de queue à l'aide de capteurs inductifs de présence. Des tests du fonctionnement en ligne du système proposé ont permis d'obtenir de bons résultats lorsque le niveau de trafic n'était pas trop élevé ; cependant, à l'approche de la saturation (périodes de pointe du midi et du soir), il s'est avéré nécessaire de maintenir le carrefour étudié dans la coordination générale du réseau, donc d'appliquer un système de commande à cycle fixe. Cette restriction, due simplement aux conditions particulières d'application, doit disparaître si l'intersection régulée est effectivement isolée.

L'étude théorique de la commande des feux d'un axe de circulation nous a permis d'aboutir aux résultats suivants :

- Les valeurs optimales du cycle et des décalages de coordination (minimisant l'ensemble des longueurs de queue présentes dans le réseau) sont calculées en ligne grâce à certaines mesures de vitesses et permettent la coordination simultanée des deux sens de circulation d'un axe routier. Cependant, le caractère hautement non linéaire du modèle mathématique employé ne permet pas de calculer directement en ligne les répartitions du cycle en phases.

- La linéarisation du modèle ci-dessus autour de points de fonctionnement, déterminés grâce à des mesures de débits d'arrivée (estimation du niveau de trafic) et d'un modèle statique linéaire de réseau, permet de mettre en oeuvre un régulateur calculant en temps réel les commandes restantes (verts); leurs valeurs dépendent, à chaque instant, de l'ensemble des longueurs de queue présentes à chaque carrefour. Les résultats obtenus en simulation permettent de dégager les conclusions suivantes :

- Le système réagit immédiatement aux perturbations et les commandes optimales appliquées aux différents carrefours ont un caractère prédictif (anticipation).
- L'amplitude des longueurs de queue reste à la disposition de l'utilisateur ; il peut favoriser, par exemple, un sens de circulation par rapport à l'autre.
- Les temps de réponse du système sont réglables grâce au choix de coefficients de pondération.
- La souplesse d'emploi et la facilité de mise en oeuvre du système de commande sont des arguments majeurs en faveur de l'implantation directe d'une telle méthode, à condition que le réseau régulé ne soit pas trop important.

Dans le cas contraire (nombre de carrefours supérieur à 10), la dimension élevée que peut prendre le vecteur d'état et le volume de calculs qui en découle, rend malaisée l'application directe des algorithmes obtenus ; on propose donc une méthode de commande sous-optimale, fondée sur la décomposition d'un grand système en sous-systèmes, qui réduit considérablement le nombre d'opérations à effectuer en ligne et qui donne, en simulation, des résultats très acceptables.

Enfin, pour des raisons de sécurité de fonctionnement, l'implantation des algorithmes de commande a lieu selon une structure hiérarchisée à deux niveaux, qui permet un fonctionnement acceptable de l'ensemble des carrefours en cas de défaillance de capteurs.

Si cette étude de la régulation d'un réseau n'aboutit pas à une application sur site pour des raisons de temps et de disponibilités du processus, elle suggère néanmoins des solutions optimales faciles à mettre en oeuvre et montre l'apport important de l'Automatique dans ce domaine.

ANNEXE 1

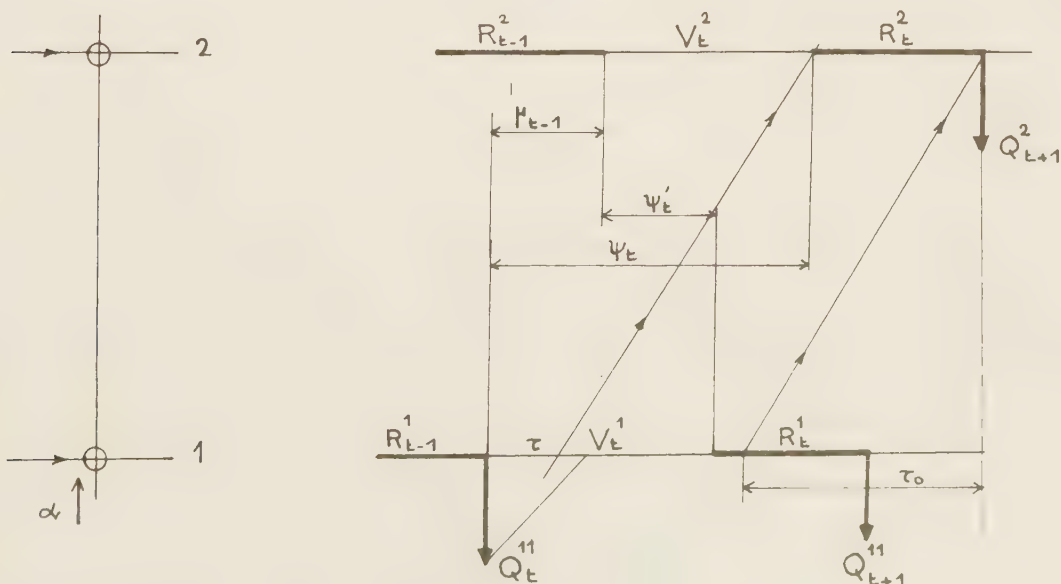
MODELE NON LINEAIRE ET OPTIMALISATION STATIQUE D'UN CHAÎNON

Cette annexe est consacrée à l'établissement d'un modèle mathématique de chaînon à l'aide d'un examen du comportement macroscopique de la circulation. Ce modèle liera les longueurs de queues en fin de rouge (états) aux grandeurs de commande (rouges, décalages) et aux perturbations (débits d'entrée du chaînon). Après avoir successivement examiné les deux sens de circulation et les modèles qui s'y rapportent, nous envisagerons une politique de commande hors ligne de deux carrefours ; si les résultats de cette méthode ne sont pas généralisables à plus de deux carrefours, ils permettent néanmoins de tirer certaines conclusions importantes qui faciliteront plus tard l'étude d'un axe complet (Ch. 2 et 3).

A.1 - CALCUL DES LONGUEURS DE QUEUE EN FIN DE ROUGE

On se place dans le cas de deux carrefours en ligne et d'un chaînon, parcouru par un seul sens de circulation. On suppose que le système n'est pas saturé, c'est-à-dire que les longueurs de queue disparaissent en fin de vert.

Représentons l'évolution de la circulation dans le diagramme espace-temps (Fig. A.1). Le carrefour 1 sera baptisé carrefour amont, le carrefour 2, carrefour aval. La référence de temps est choisie sur le carrefour amont.



- Fig. A.1 -

L'état de ce chaînon est caractérisé par un vecteur contenant les longueurs de queues en fin de rouge $|Q_t^1, Q_t^2|$.

Les grandeurs de commande sont : $\psi_t, \psi_t', R_t^1, R_t^2$, c'est-à-dire les décalages amont et aval et les longueurs du rouge des deux carrefours (ces décalages, non classiques, ont été choisis pour leur facilité d'emploi).

On a noté d'autre part :

τ_0 : temps de parcours des véhicules, en supposant que leur progression est uniforme.

τ : temps d'évacuation de la queue Q_t^{11} .

μ_{t-1} : décalage entre la fin du rouge R_{t-1}^1 et la fin du rouge R_{t-1}^2 .

α : débit moyen d'arrivée au carrefour amont.

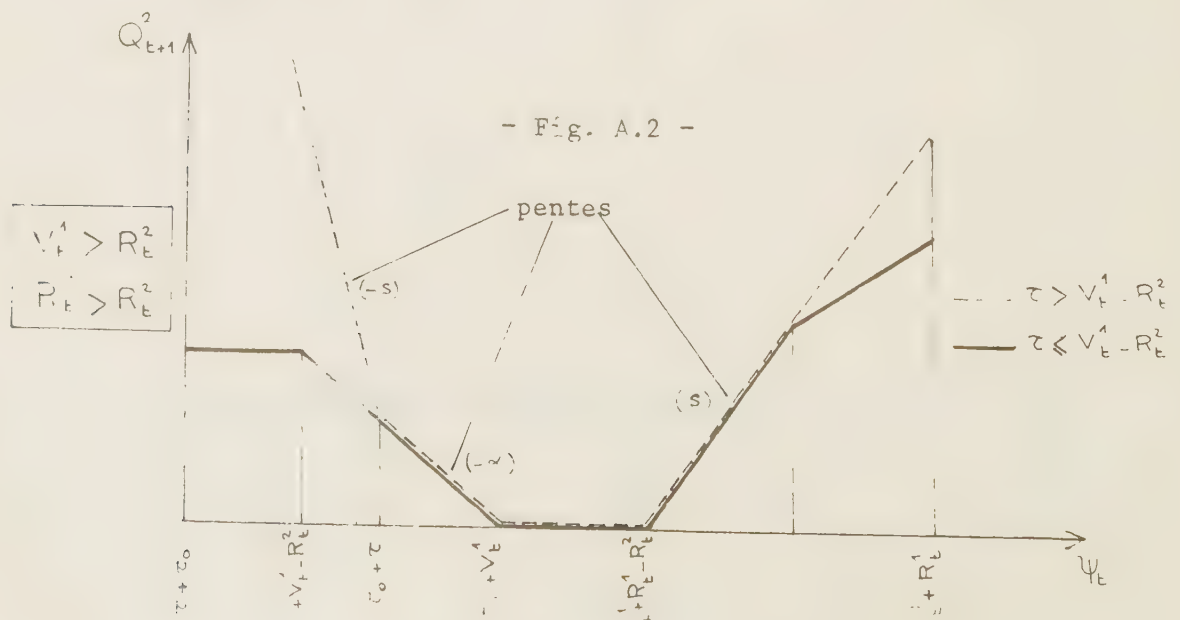
v_t^1, v_t^2 : les durées de verts des carrefours 1 et 2.

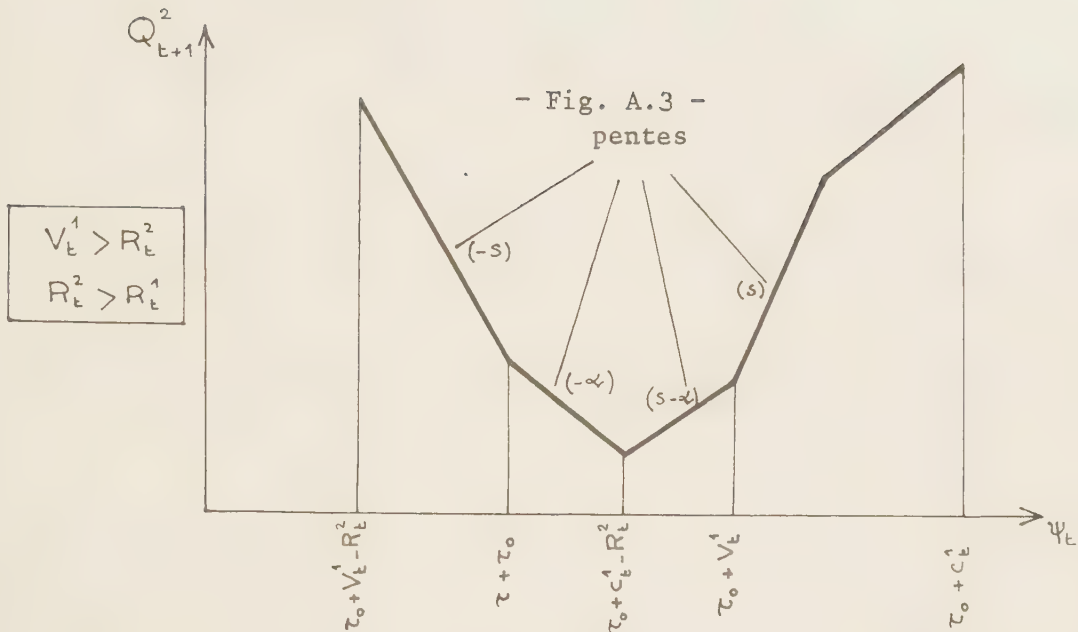
Remarquons que le débit de sortie du carrefour 1 prend successivement deux valeurs :

s débit de saturation entre les instants t et $t + \tau$,

α débit moyen d'arrivée entre les instants $t + \tau$ et $t + v_t^1$.

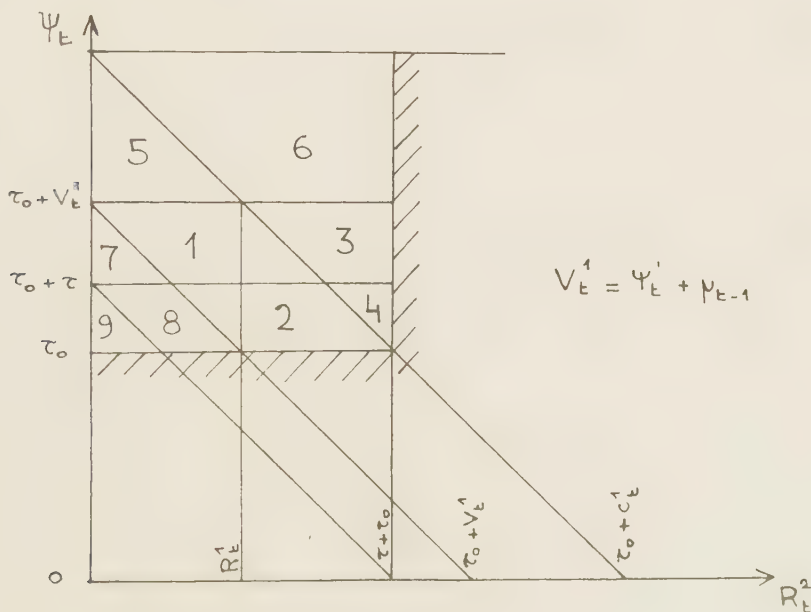
Etablir un modèle de chaînon consiste à étudier les variations des états Q_{t+1}^1, Q_{t+1}^2 en fonction des commandes et des perturbations (débits moyens d'arrivée). Une étude systématique a permis de déterminer ces courbes dont on présente ci-dessous (Fig. A.2 et A.3) deux exemples.





Ces courbes sont linéaires par morceaux et nous remarquons que les quatre commandes du chaînon $\psi_t, R_t^1, R_t^2, \psi_t^1$ interviennent dans leur construction.

De très nombreux cas de figure se présentent selon les valeurs respectives des commandes qu'il n'est pas possible de représenter sous la forme ci-dessus. C'est pourquoi nous avons concentré les résultats dans le plan des commandes (ψ_t, R_t^2) figuré ci-dessous (Fig. A.4) ; ce plan se trouve partagé par des relations linéaires définissant le domaine de validité de chaque équation.



- Fig. A.4 -

Dans la partie du plan considérée, 9 zones distinctes sont mises en évidence ; dans chacune de ces zones, les équations liant l'état Q_{t+1}^2 et les commandes sont linéaires ; leurs expressions sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

n° de zone	Equation	Contraintes
1	$Q_{t+1}^2 = \alpha(\tau_o + \psi_t' + \mu_{t-1} - \psi_t)$	$\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t - R_t^2 + \psi_t' \leq 0$ $\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \geq 0$ $\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t + \psi_t' \geq 0$ $\tau_o + \tau - \psi_t \leq 0$
2	$Q_{t+1}^2 = (s-\alpha)\tau + s\tau_o + \alpha\mu_{t-1} + \alpha\psi_t' - s\psi_t$	$\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t - R_t^2 + \psi_t' \leq 0$ $\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \geq 0$ $\tau_o - \psi_t \leq 0$ $\tau + \tau_o - \psi_t \geq 0$
3	$Q_{t+1}^2 = s(R_t^2 - R_t^1) + (s-\alpha)(\psi_t - \psi_t' - \mu_{t-1} - \tau_o)$	$\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \leq 0$ $\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t + \psi_t' \geq 0$ $\tau_o - \psi_t \leq 0$ $\mu_{t-1} - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \geq 0$
4	$Q_{t+1}^2 = s(R_t^2 - R_t^1) + (s-\alpha)(\tau - \mu_{t-1} - \psi_t')$	$\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \leq 0$ $\tau_o + \tau - \psi_t \geq 0$ $\mu_{t-1} - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \geq 0$ $-R_t^2 + R_t^1 \leq 0$
5	$Q_{t+1}^2 = 0$	$\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \geq 0$ $R_t^2 - R_t^1 \leq 0$ $\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t + \psi_t' \leq 0$

n° de zone	Equations	Contraintes
6	$Q_{t+1}^2 = s(R_t^2 - R_t^1) +$ $s(\psi_t - \tau_o - \psi_t' - \mu_{t-1})$	$\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \leq 0$ $\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t + \psi_t' + R_t^1 \geq 0$ $\tau_o + \mu_{t-1} - \psi_t + \psi_t' \leq 0$ $\mu_{t-1} - R_t^2 + \psi_t' + R_t^1 \geq 0$
7	$Q_{t+1}^2 = \alpha R_t^2$	$R_t^2 \geq 0$ $\psi_t + R_t^2 - \tau_o - \psi_t' - \mu_{t-1} \leq 0$ $\psi_t - \tau - \tau_o \geq 0$
8	$Q_{t+1}^2 = \alpha R_t^2 + (s - \alpha)$ $(\tau + \tau_o - \psi_t)$	$\psi_t + R_t^2 - \tau_o - \psi_t' - \mu_{t-1} \leq 0$ $\psi_t + R_t^2 - \tau - \tau_o \geq 0$ $\psi_t - \tau - \tau_o \leq 0$ $\psi_t \geq \tau_o$
9	$Q_{t+1}^2 = s R_t^2$	$\psi_t + R_t^2 - \tau - \tau_o \leq 0$ $R_t^2 \geq 0$ $\psi_t - \tau_o \geq 0$

En fait, le but d'une bonne régulation étant de minimiser les longueurs de queue, certaines zones (7, 8, 9) n'interviendront pas dans la suite de l'étude. On remarque en effet que les minima des courbes donnant Q_{t+1}^2 se situent aux alentours de la contrainte $\psi_t + R_t^2 = \tau_o + V_t^1 + R_t^1$, c'est-à-dire dans les zones 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

L'étude d'un chaînon complet nécessite l'examen du 2ème sens de circulation pour lequel les commandes sont ψ_t' , R_t^1 et la sortie la longueur de queue Q_{t+1}^1 (Fig. A.5).

On ne considèrera dans la suite que les six premières zones.

Remarque : Dans ce cas, les queues et les contraintes dépendent des commandes à l'instant précédent c'est-à-dire de R_{t-1}^2 et V_{t-1}^2 .

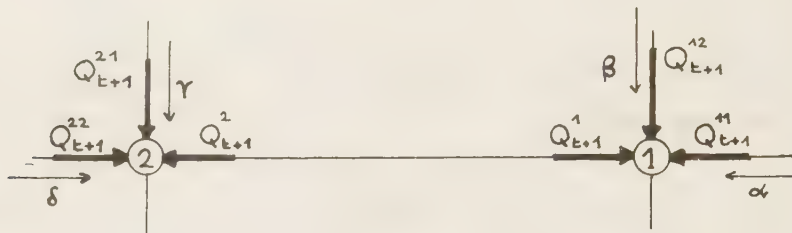
Les expressions de Q_{t+1}^1 sont regroupées dans le tableau suivant :

n° de zone	Equation	Contraintes
1	$Q_{t+1}^1 = \delta(R_t^1 - R_{t-1}^2) + \delta(\tau_o' - R_t^1 - \psi_t')$	$\tau_o' - R_{t-1}^2 - \psi_t' \geq 0$ $\tau_o' + \tau - R_{t-1}^2 - V_{t-1}^2 - \psi_t' \leq 0$ $\tau_o' - \psi_t' - R_t^1 \geq 0$
2	$Q_{t+1}^1 = \delta(R_t^1 - R_{t-1}^2) + (s-\delta)(\psi_t' - \tau_o' + R_t^1)$	$\tau_o' - \psi_t' - R_t^1 \leq 0$ $\tau_o' - R_{t-1}^2 - \psi_t' \geq 0$ $\tau_o' + \tau' - \psi_t' - R_t^1 \geq 0$ $R_t^1 - \tau_o' \leq 0$
3	$Q_{t+1}^1 = (\delta-s)(V_{t-1}^2 - \tau) + s(\tau_o' - R_{t-1}^2 - \psi_t')$	$\tau + \tau_o' - R_{t-1}^2 - V_{t-1}^2 - \psi_t' \geq 0$ $\tau_o' - \psi_t' - R_t^1 \geq 0$ $\tau_o' - R_t^1 \geq 0$ $\tau_o' - R_{t-1}^2 - \psi_t' \geq 0$
4	$Q_{t+1}^1 = s(R_t^1 - R_{t-1}^2) + (\delta-s)(V_{t-1}^2 - \tau)$	$\tau_o' - \psi_t' - R_t^1 \leq 0$ $\tau + \tau_o' - R_{t-1}^2 - V_{t-1}^2 - \psi_t' \geq 0$ $\tau_o' - R_t^1 \geq 0$ $\tau' + \tau_o' - \psi_t' - R_t^1 \geq 0$
5	$Q_{t+1}^1 = sR_t^1 + s(\psi_t' - \tau_o')$	$\tau_o' - \psi_t' \geq 0$ $\tau_o' - R_{t-1}^2 - \psi_t' \leq 0$ $\tau_o' + \tau' - \psi_t' - R_t^1 \geq 0$ $\tau_o' - \psi_t' - R_t^1 \leq 0$
6	$Q_{t+1}^1 = 0$	$\tau_o' - \psi_t' - R_t^1 \geq 0$ $\tau_o' - R_{t-1}^2 - \psi_t' \leq 0$ $R_{t-1}^2 - R_t^1 \geq 0$

Les expressions des longueurs de queues Q_{t+1}^1 et Q_{t+1}^2 établies, nous sommes en mesure de représenter un chaînon complet.

A.2 - Etablissement d'un modèle de chaînon

On considère maintenant le cas particulier de deux carrefours en ligne à deux sens de circulation (Fig. A.7). Les débits d'arrivée sont supposés constants et égaux à leur valeur moyenne sur un cycle.



- Fig. A.7 -

On note : - Q_{t+1}^{22} , Q_{t+1}^2 , Q_{t+1}^1 , Q_{t+1}^{11} les longueurs de queue en fin de rouge précédemment définies (A.1).

- Q_{t+1}^{21} , Q_{t+1}^{12} les longueurs de queue en fin de rouge des voies adverses.

- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les débits moyens d'arrivée.

On suppose que ce réseau n'est pas saturé, c'est-à-dire que les longueurs de queue disparaissent en fin de vert. Dans ces conditions, les équations d'état régissant le fonctionnement de ce réseau sont :

$$Q_{t+1}^{11} = \alpha R_t^1$$

$$Q_{t+1}^{12} = \beta(\psi_t' + \mu_{t-1})$$

$$Q_{t+1}^{22} = \delta(R_t^2)$$

$$Q_{t+1}^{21} = \gamma(\psi_t - \mu_{t-1})$$

Q_{t+1}^1
 Q_{t+1}^2 ont les expressions définies en A.1.

compte tenu des contraintes de non saturation des voies principales :

$$\begin{aligned} \psi_t' + \mu_{t-1} &\geq \tau && \text{temps d'évacuation de } Q_{t+1}^{11} \\ \psi_t - \mu_{t-1} &\geq \tau' && \text{temps d'évacuation de } Q_{t+1}^{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_t - \mu_{t-1} &\geq \tau'_1 && \text{temps d'évacuation de } Q_t^2 \\ \psi'_t + \mu_{t-1} &\geq \tau_1 && \text{temps d'évacuation de } Q_t^1 \end{aligned}$$

et des contraintes de non saturation des voies latérales :

$$\begin{aligned} (s-\gamma) R_t^2 &\geq (\psi_t - \mu_{t-1})\gamma && \text{pour la voie 21.} \\ (s-\beta) R_t^1 &\geq (\psi'_t + \mu_{t-1})\beta && \text{pour la voie 12.} \end{aligned}$$

Remarque : Les différents temps d'évacuation $\tau, \tau', \tau_1^1, \tau_1^2$ s'expriment en fonction des longueurs de queues $Q_t^{11}, Q_t^{22}, Q_t^2, Q_t^1$ et des débits d'arrivée ; par exemple :

$$\tau = \frac{Q_t^{11}}{s-\alpha} \quad \text{et} \quad \tau' = \frac{Q_t^{22}}{s-\delta}$$

Nous sommes parvenus à représenter le fonctionnement de deux carrefours en ligne grâce à un modèle d'état contenant :

- des équations linéaires pour les voies latérales
- des équations linéaires par morceaux pour les voies principales sous les hypothèses suivantes :
 - . le réseau n'est pas saturé
 - . il n'y a pas de mouvements tournants.

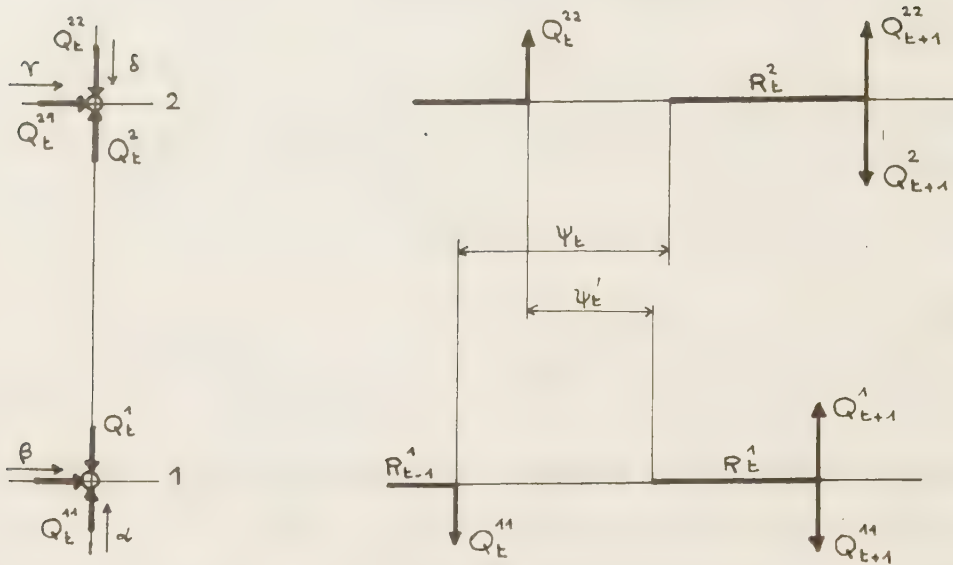
Nous verrons, dans le chapitre 1, que ces hypothèses ne sont pas restrictives. Le paragraphe suivant concerne l'optimisation d'un réseau de ce type, c'est-à-dire la recherche des commandes $\psi_t, \psi'_t, R_t^1, R_t^2$ minimisant l'ensemble des longueurs de queue.

A.3 - OPTIMISATION HORS LIGNE DE DEUX CARREFOURS

Le modèle de commande établi, nous devons l'utiliser pour déterminer les commandes $\psi_t, \psi'_t, R_t^2, R_t^1$ qui rendent le trafic le plus fluide possible, tout en respectant les conditions de non-saturation des différentes voies.

Le nombre élevé d'équations régissant le fonctionnement du réseau et le nombre important de cas à examiner nous obligent à effectuer cette étude hors ligne. Les conclusions très importantes de ce paragraphe nous fourniront des indications essentielles pour la généralisation à un réseau quelconque.

A.3.1 - Critère de régulation



-Fig. A.8 -

Le chaînon étudié est représenté par le diagramme espace-temps de la figure A.8. La référence de temps est prise sur le carrefour 1. Le problème de la régulation de ce chaînon est le suivant :

"Déterminer les commandes ψ_t , ψ'_t , R_t^1 , R_t^2 qui minimisent le critère :

$$J = f[Q_{t+1}^1, Q_{t+1}^2, Q_{t+1}^{11}, Q_{t+1}^{22}, Q_{t+1}^{12}, Q_{t+1}^{21}]$$

compte tenu des équations d'état :

$$Q_{t+1}^{11} = \alpha R_t^1$$

$$Q_{t+1}^{12} = \beta(\psi'_t + \mu_{t-1})$$

$$Q_{t+1}^{22} = \delta R_t^2$$

$$Q_{t+1}^{21} = \gamma(\psi_t - \mu_{t-1})$$

$$Q_{t+1}^1$$

$$Q_{t+1}^2$$

dont les expressions sont définies en A.1.

et des contraintes de non-saturation explicitées en A.2."

Sans nuire à la signification physique du critère, la période d'optimisation est réduite au minimum, c'est-à-dire à un cycle ; le temps de calcul et la complexité de programmation deviennent, en effet, rapidement prohibitifs pour une période plus longue.

Si on remarque que les contraintes définissant les diffé-

rentes zones d'application des équations sont linéaires, un critère linéaire permettrait d'appliquer les méthodes de programmation linéaire particulièrement adaptées au traitement des problèmes de ce type, comportant un grand nombre de variables.

Le critère d'optimisation est alors :

$$J = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 Q_{t+1}^{ij} + \sum_{i=1}^2 Q_{t+1}^i$$

L'emploi de ce type de critère, s'il ne permet pas d'obtenir une commande en boucle fermée, nous permettra cependant de résoudre le problème de l'optimisation statique d'un chaînon.

A.3.2 - Résultats de l'optimisation

Le problème d'optimisation posé ci-dessus est résolu grâce à la méthode du simplexe (programmation linéaire). Son application exige une mise en forme des équations et des contraintes.

Si on note x_i l'ensemble des commandes, le problème se pose en les termes suivants :

$$\text{Minimiser } J = a_{00} + \sum_{i=1}^n a_{0i} x_i \quad \text{avec } x_i \geq 0$$

Compte tenu des contraintes :

$$a_{i0} + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \geq 0 \quad \text{avec } a_{i0} \geq 0$$

$$i = 1, \dots, m_1$$

$$a_{i0} + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq 0 \quad \text{avec } a_{i0} \geq 0$$

$$i = 1, \dots, m_1$$

où a_{ij} sont des coefficients dépendant dans notre cas des caractéristiques de notre système, c'est-à-dire des débits d'arrivée, des débits de saturation, des longueurs de queues à l'instant t .

L'utilisation de cette méthode nécessite donc la construction de la matrice des coefficients A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m10} & a_{m11} & \dots & a_{m1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m20} & a_{m21} & \dots & a_{m2n} \end{bmatrix}$$

Critère

Contraintes de type ≥ 0

Contraintes de type ≤ 0

Pour chaque couple de zones choisi, on doit donc reconstruire la matrice A, au moins en partie. Les contraintes intervenant dans notre problème sont de deux types :

- les contraintes communes à toutes les zones correspondant à la non-saturation des voies.
- les contraintes propres à chaque zone de fonctionnement.

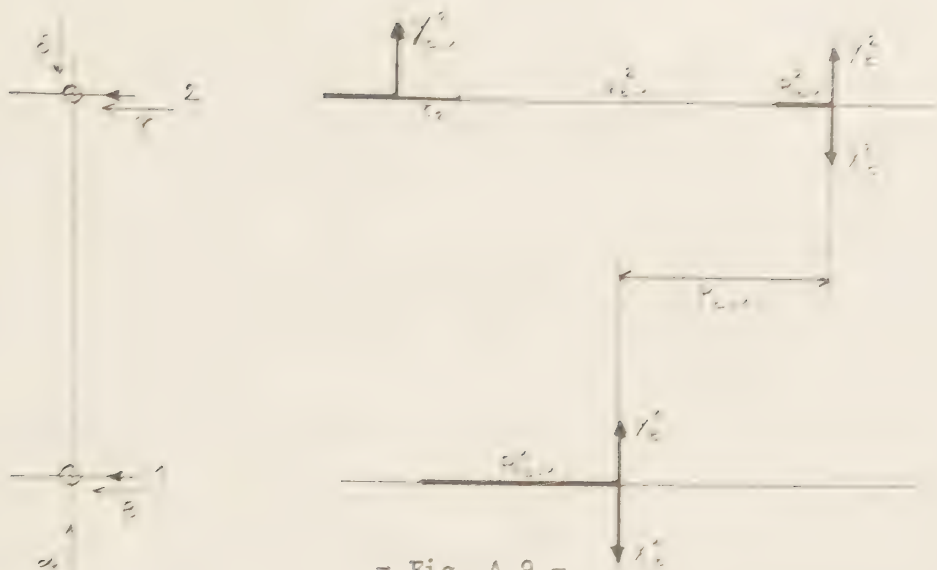
L'application de la méthode du simplexe nécessite que le nombre de contraintes doit rester constant quelle que soit la zone considérée, d'où l'introduction de contraintes redondantes fictives.

On présente, en annexe 1.2 de ce chapitre, l'organigramme de calcul qui nous a permis d'obtenir les résultats qui vont suivre.

La recherche du minimum du critère linéaire (somme des queues sur toutes les voies) conduit à l'examen de six zones pour le sens amont et de six zones pour le sens aval, soit 36 calculs différents. Ci-dessous figurent deux résultats d'optimisation sur lesquels nous allons dégager quelques conclusions intéressantes.

Exemple d'optimisation de deux carrefours

On suppose les longueurs de queues et les débits d'arrivée connus à l'instant t.

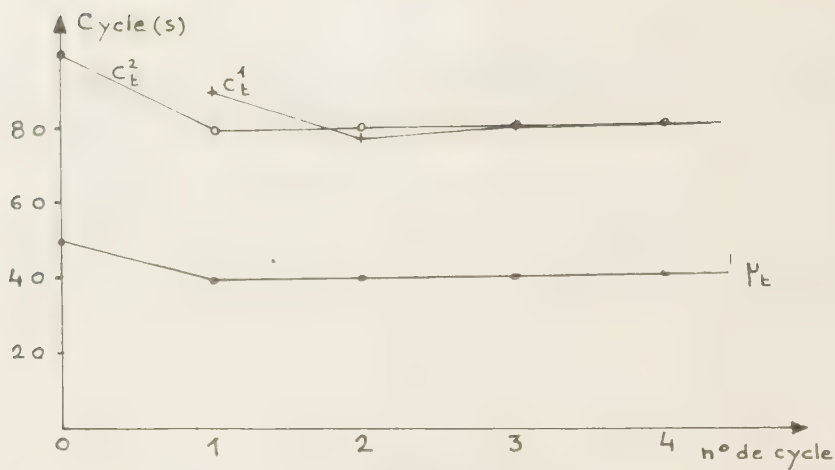


- Fig. A.9 -

- temps de parcours : $\tau_0 = \tau'_0 = 40$ sec.
- débits d'arrivée : $\alpha = 0,2$ veh/s ; $\delta = 0,2$ veh/s ; $\beta = \gamma = 0,01$ veh/s
(très faible)
- conditions initiales : $R_{t-1}^2 = 1,78$ s ; $V_{t-1}^3 = 88,2$ s soit un cycle de
100 s.
 $\tau_2 = 12$ s (temps d'évacuation de la queue Y_{t-1}^2)
 $X_t^1 = 6,6$; $Y_t^1 = 0$; $X_t^2 = 0$; $Y_t^2 = 0,36$
 $u_{t-1} = 50$ sec.

- résultats : (grandeurs en secondes)

	t=1	t=2	t=3	t=4
v_t	128,2	118,4	118,4	118,4
v_t^2	1,8	1,6	1,6	1,6
v_t^1	38,2	38,4	38,4	38,4
p_t^1	1,8	1,6	1,6	1,6
v_t^2	78,2	78,4	78,4	78,4
v_t^1	88,2	78,2	78,4	78,4
c_t^1	90	79,8	80	80
c_t^2	80	80	80	80
u_t	40	40	40	40



- Fig. A.10 -

- Remarque :
- le système atteint rapidement son régime permanent (2 cycles)
 - la valeur du cycle optimal en régime permanent est égale à deux fois le temps de parcours.
 - la valeur de μ_t devient constante et égale au temps de parcours.
 - la différence $C_t^1 - C_t^2$ est à chaque instant égale à $\mu_t - \tau_0$.
 - si les entrées sont symétriques (débits), les valeurs du rouge sont égales, ainsi que les valeurs du vert.

Exemple de variations du cycle

L'exemple ci-dessous calcule les différents paramètres de la régulation à partir de conditions initiales données, pour différentes valeurs du débit γ .

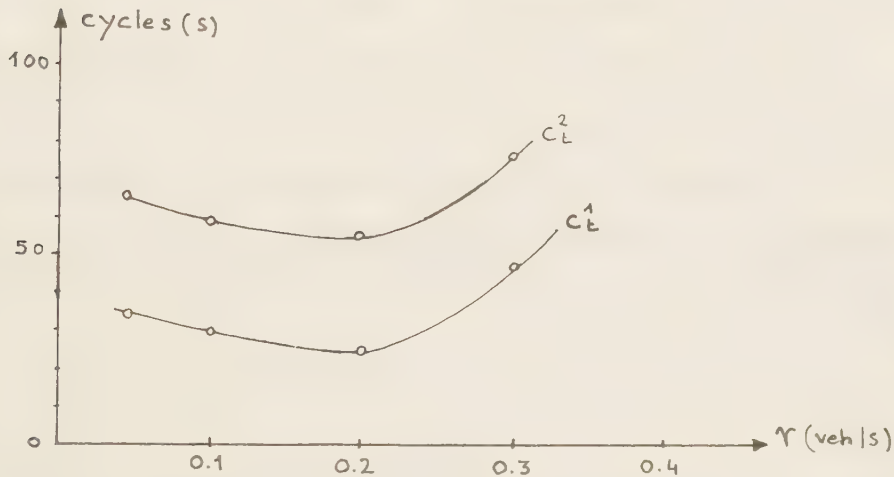
γ	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.35	veh/s
ψ_t	67	56,6	41,8	40	40	les conditions de non-saturation ne peuvent être réalisées	
R_t^2	6,3	11,66	21,2	30	45		
ψ_t'	20	15,48	10,72	17	20		
R_t^1	3,3	2,83	2,30	3	15		
V_t^2	57	46,65	31,81	30	30		
V_t^1	30	25,48	20,71	27	30		
C_t^1	33,3	28,31	23,02	30	45		
C_t^2	63,3	58,31	53,02	60	75		

Les conditions initiales sont :

$$\mu_{t-1} = 10 \text{ s} ; \alpha = 0,3 \text{ veh/s} ; \beta = 0.05 \text{ veh/s} ; \delta = 0.2 \text{ veh/s}$$

$$x_t^1 = 3,33 ; y_t^1 = 3 \quad x_t^2 = 5 ; y_t^2 = 3$$

$$\tau_o = \tau_o' = 40 \text{ s} \quad (\text{temps de parcours})$$



- Fig. A.11 -

Remarques : - la différence entre les cycles $C_t^2 - C_t^1$ est constante et égale à $\tau_o - \mu_{t-1}$, c'est-à-dire ici 30 s.

- Pour des valeurs du débit γ grandes, les conditions de non-saturation des voies ne peuvent plus être réalisées.

- La nouvelle valeur de μ devient, dans tous les cas, égale au temps de parcours (ici 40 s).

Les temps de parcours τ_o et τ_o' étant connus, les débits d'arrivée constants, les commandes tendent vers un régime permanent (exemple 1) tel que :

$$\begin{cases} \psi_t + R_t^2 = \tau_o + V_t^1 + R_t^1 \\ \psi_t' + R_t^1 = \tau_o' \end{cases}$$

On en déduit les valeurs des cycles et de μ en régime permanent :

$$C_t^1 = V_t^1 + R_t^1 = \psi_t' + \mu + R_t^1 = \tau_o' + \mu$$

$$C_t^2 = V_t^2 + R_t^2 = \psi_t - \mu + R_t^2 = \tau_o + C_t^1 - \mu$$

$$\mu = \psi_t + R_t^2 - (\psi_t' + R_t^1) - \mu \Rightarrow \mu = \tau_o$$

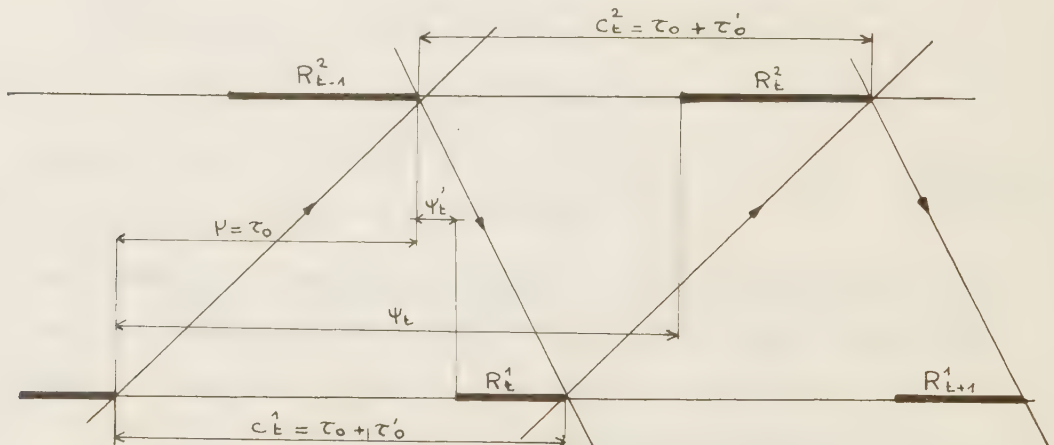
Soit finalement :

$$\mu = \tau_o \quad ; \quad C_t^1 = C_t^2 = \tau_o + \tau_o'$$

Ces relations sont vérifiées sur les exemples traités ci-dessus. En outre, la différence des deux cycles est toujours égale à $\tau_o - \mu$ d'après les relations ci-dessus.

Le découpage des cycles en phase est déterminé grâce aux valeurs des débits d'arrivée.

En conclusion, les valeurs optimales du cycle commun et des décalages permettent de coordonner les deux sens de circulation d'un chaînon (Fig. A.12), ce qui n'est pas possible lorsqu'on détermine à priori ces deux grandeurs.



- Fig. A.12 -

La vitesse de parcours d'un carrefour à l'autre dépend du degré de saturation du chaînon ; s'il est par exemple assez chargé, la vitesse moyenne des véhicules est faible et le temps de parcours est long. On peut donc envisager une politique de commande à cycle variable et décalages variables selon les conditions de trafic.

A.4 - DIFFICULTES D'EXTENSION A PLUS DE DEUX CARREFOURS

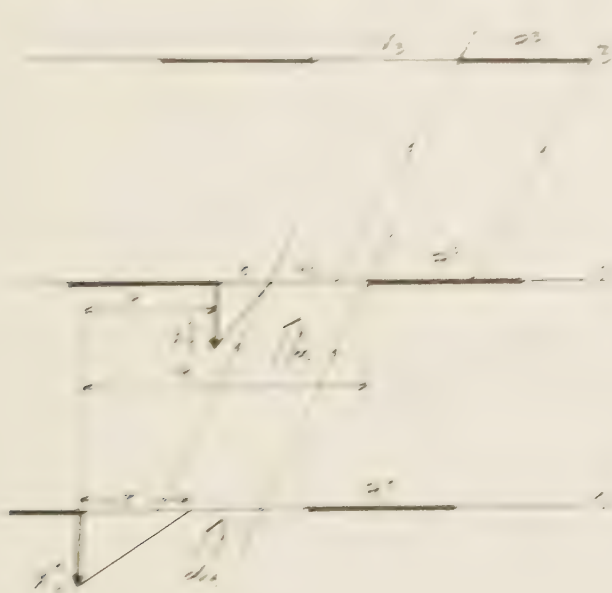
La recherche systématique du minimum du critère et des zones dans lesquelles il est obtenu, devient irréalisable dans le cas de plusieurs carrefours. On a vu en effet que la recherche de cet optimum pour deux intersections nécessitait 36 calculs, soit environ 3 minutes de calcul sur IBM 360-30. Si on désire traiter de cette manière trois carrefours en ligne,

le temps de calcul est porté à environ 20 minutes. Cette méthode de recherche devient rapidement prohibitive tant du point de vue temps de calcul que du point de vue programmation.

La conclusion essentielle du paragraphe précédent est que le cycle doit être commun pour les deux carrefours extrêmes d'un tronçon. L'optimisation de plusieurs carrefours en ligne impose donc que le cycle soit commun à tous les carrefours (hypothèse classique en coordination de réseaux). La seule solution possible est donc qu'un chef de file impose la valeur du cycle ($\tau_0 + \tau'_0$) aux autres carrefours ; il s'ensuit alors une séquence de vitesses imposée le long de l'itinéraire (vitesses de coordination optimales). Un exemple est proposé en annexe 1.1.

D'autre part, l'optimisation de deux carrefours en ligne précédemment traitée [A.3] implique la connaissance des débits moyens d'arrivée sur les diverses approches. Lorsque ces deux carrefours sont inclus dans un réseau, les débits d'arrivée deviennent fonction des commandes (verts, cycle, décalages) des carrefours adjacents amont et aval. Ces fonctions sont comme nous allons le voir non linéaires. Le calcul sera effectué sur l'exemple de trois carrefours en ligne ne comportant qu'un seul sens de circulation.

Considérons le diagramme espace-temps représentant l'évolution de la circulation dans ces trois carrefours (Fig. A.13).



- Fig. A.13 -

où τ , τ' sont les temps d'évacuation des queues X_t^1 et X_t^2 .

2 le débit moyen d'arrivée dans la bande $(\tau_2 - \tau)$

3 le débit moyen d'arrivée sur le carrefour 1.

5 le débit de saturation

τ_0 le temps de parcours.

τ le décalage.

Plusieurs cas représentant selon les valeurs respectives des

différentes grandeurs précédemment définies :

1) $\tau_0 < \tau + \mu$

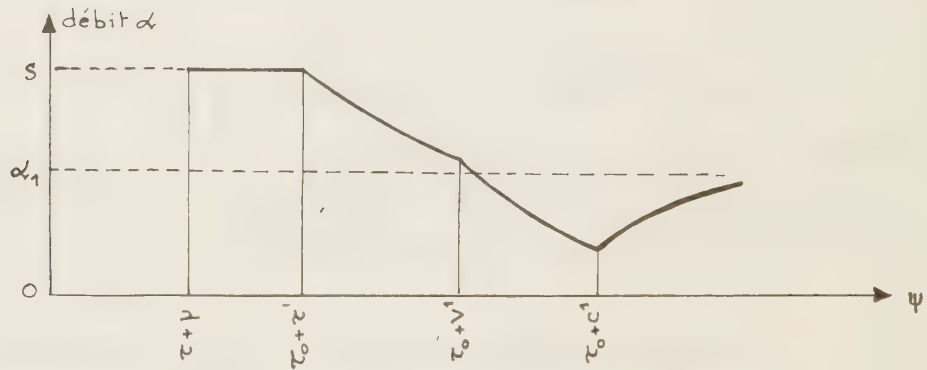
L'expression du débit α est :

$$\alpha = s \quad \text{pour } \psi < \tau_0 + \tau'$$

$$\alpha = \frac{s(\tau' - \tau - \mu + \tau_0) + \alpha_1(\psi - \tau_0 - \tau')}{\psi - \mu - \tau} \quad \text{pour } \tau_0 + \tau' \leq \psi \leq \tau_0 + V_1$$

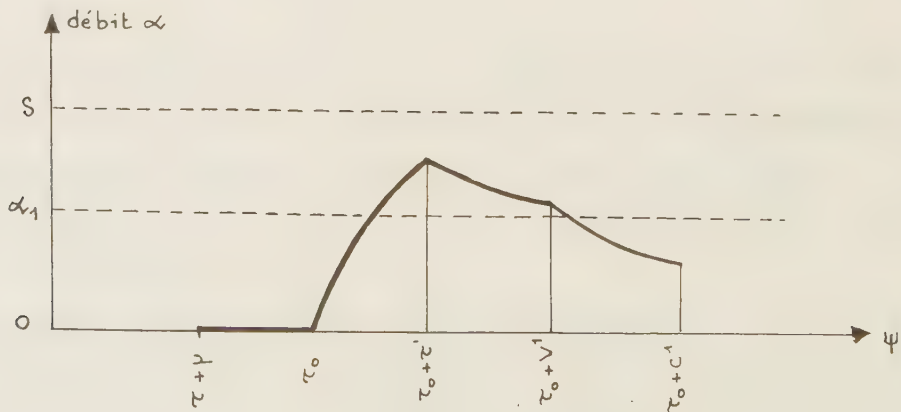
$$\alpha = \frac{s(\tau' - \tau - \mu + \tau_0) + \alpha_1(V_1 - \tau)}{\psi - \mu - \tau} \quad \text{pour } \tau_0 + V_1 \leq \psi \leq \tau_0 + V_1 + R_1$$

La courbe représentant l'évolution de α en fonction du décalage ψ est la suivante (Fig. A.14).



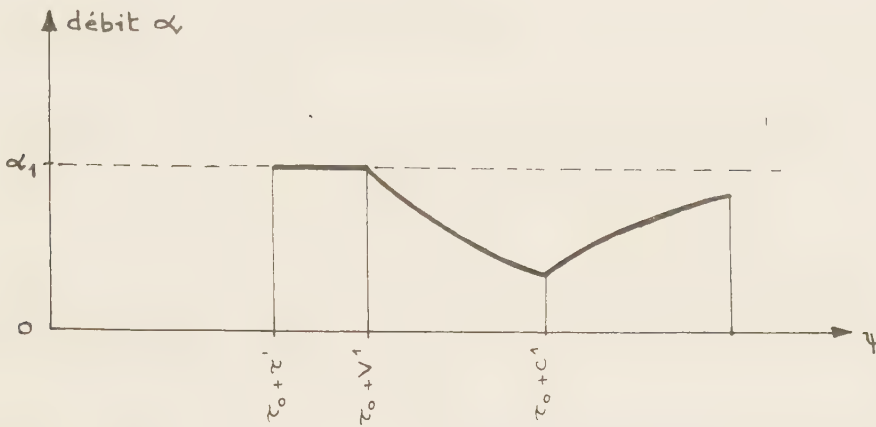
- Fig. A.14 -

2) Cas où $\tau_0 > \tau + \mu$. On ne représentera que les courbes d'évolution de α en fonction de ψ . On obtient ici :



- Fig. A.15 -

3) Cas où $\tau + \mu > \tau_0 + \tau'$ mais $< \tau_0 + V_1$. La courbe représentative est :



- Fig. A.16 -

4) Cas où $\tau + \mu \geq \tau_0 + V_1$ et $\leq \tau_0 + V_1 + R_1$. Dans ce cas $\alpha = 0$

En résumé, les débits d'arrivée α sont des fonctions hautement non linéaires du décalage et des paramètres de commande du carrefour précédent ; elles sont donc difficilement utilisables dans un système de commande simple destiné à fonctionner en temps réel.

CONCLUSION : L'analyse du trafic dans un réseau a permis d'aboutir aux résultats suivants :

Un modèle de chaînon non linéaire peut être réalisé et validé, mais est très difficilement utilisable pour des réseaux importants ; cependant, son étude a permis de dégager certaines conclusions sur la valeur optimale du cycle et des décalages minimisant la somme des longueurs de queues en fin de rouge. Rappelons ces résultats :

la valeur du cycle est : $C = \tau_0 + \tau'_0$

la valeur des décalages sont : $\mu = \tau_0$

$$\psi_t + R_t^2 = \tau_0 + V_t^1 + R_t^1$$

$$\psi'_t + R_t^1 = \tau'_0$$

L'extension à un ensemble de carrefours exige la connaissance des débits d'arrivée - qui sont des fonctions non linéaires des commandes - ainsi qu'une recherche de minimum conduisant à un temps de calcul et à une programmation prohibitive. Pour tirer profit de la modélisation,

il est donc nécessaire de linéariser ces modèles autour de certains points de fonctionnement ; c'est le but des chapitres 1, 2 et 3.

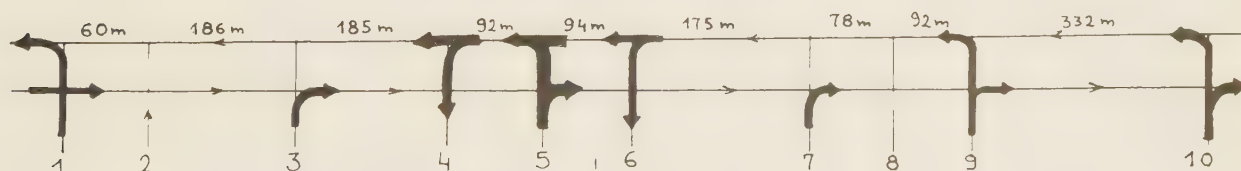
ANNEXE 1.1

Rappelons les conclusions, obtenues en A.3, que nous allons retrouver ici sur un exemple.

- Le cycle doit être commun à tous les carrefours de l'axe.
- Sa valeur dépend du temps de parcours imposé par un chaînon pilote.
- La valeur des décalages se déduit de celle du cycle.
- Une vitesse de coordination est imposée pour tous les autres chaînons de l'axe.

On propose ici, sur un exemple concret de 10 carrefours en ligne, une méthode de coordination de réseaux, qui consiste à déterminer la valeur du cycle et des décalages optimaux grâce à une mesure de vitesse sur un chaînon pilote. Nous examinons ensuite la procédure classique suivie lors des changements de cycle et les transitoires qui en découlent.

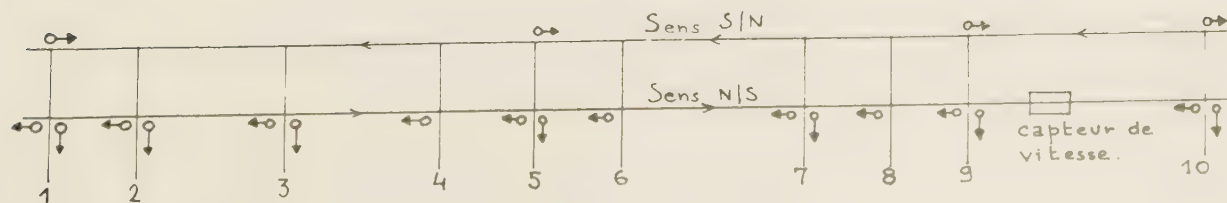
Prenons l'exemple réel d'un axe à deux sens de circulation séparés par un terre-plein central et comportant 10 carrefours en ligne (Fig. A.17) sur lequel sont figurés les divers mouvements de véhicules sur les carrefours 1 à 10.



- Fig. A.17 -

Les mouvements tourne à gauche ont des voies réservées, ce qui ne perturbe pas le fonctionnement du mouvement direct.

On représente (Fig. A.18) l'emplacement des feux de signalisation.



- Fig. A.18 -

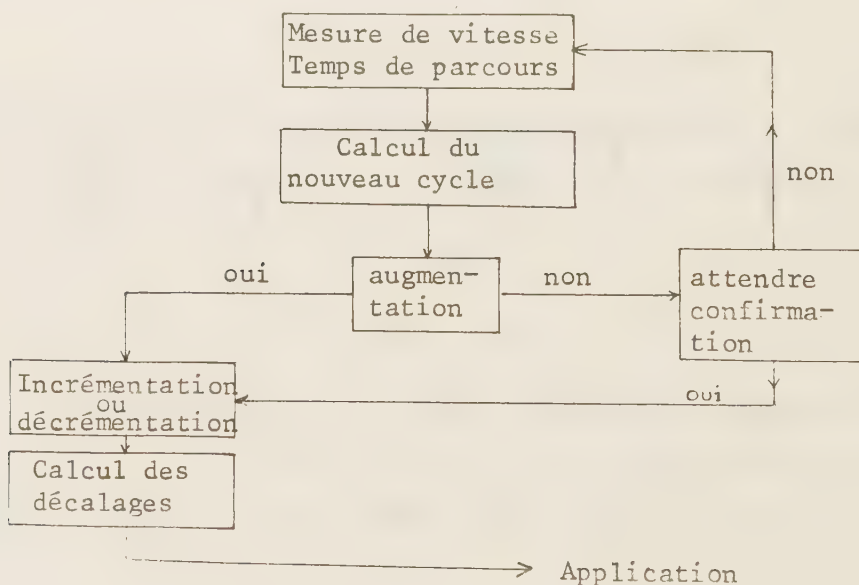
L'examen des mouvements de véhicules nous permet de définir quatre carrefours principaux devant être coordonnés dans les deux sens (1 - 5 - 9 - 10). Les autres carrefours ne font intervenir en effet que des mouvements de véhicules n'entravant pas la circulation du sens S/N.

Un capteur de mesure de vitesse est situé sur le chaînon le plus important de l'axe soit entre les carrefours 9 et 10. Ce chaînon sera le chaînon pilote de l'axe.

Le calcul du cycle et des décalages de coordination s'effectue grâce à une mesure de vitesse sur le chaînon pilote, que l'on convertit en temps de parcours. Les limites généralement imposées par les responsables de la circulation pour le calcul du cycle sont :

- une durée de cycle minimum et maximum (par exemple 60 s et 100 s).
- une variation incrémentale du cycle (par exemple de 4 en 4 s).
- application immédiate du nouveau cycle en cas d'augmentation, mais attente d'une confirmation en cas de diminution.
- application du nouveau cycle à partir d'un carrefour extrémité (par exemple le carrefour 1).

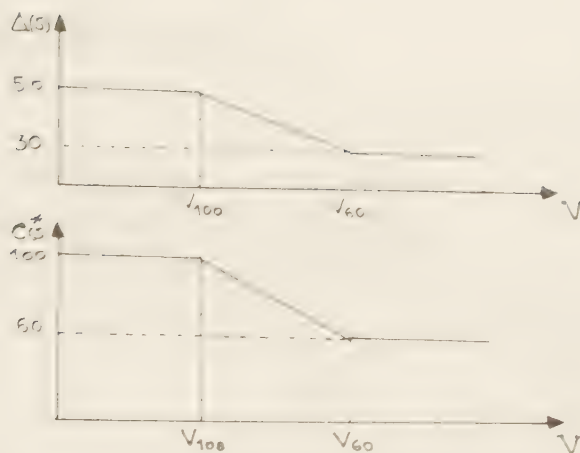
L'organigramme de calcul est alors le suivant :



On propose les relations suivantes permettant le calcul des décalages (Δ) et de la durée de cycle optimale (C^*), compte tenu des contraintes ci-dessus imposées ($60 \text{ s} \leq C^* \leq 100 \text{ s}$).

$$\Delta = 50 - 20 \frac{V - V_{100}}{V_{60} - V_{100}}$$

$$C^* = 100 - 40 \frac{V - V_{100}}{V_{60} - V_{100}}$$



où V_{60} et V_{100} désignent respectivement les vitesses moyennes des véhicules pour un cycle de 60 et 100 secondes et V la vitesse moyenne mesurée.

On représente sur la planche suivante la coordination de l'axe étudié pour un cycle de 60 secondes. On remarque que des adaptations locales peuvent tenir compte des mouvements tourne à droite.

En conclusion, la coordination simultanée des deux sens de circulation d'un axe est réalisable ; cependant, certains problèmes apparaissent lors des procédures de changement de cycle.

Régimes transitoires dûs aux changements de cycle

Des régimes transitoires apparaissent lors de la procédure de changement de cycle et de décalages. Il est en effet nécessaire de prolonger certains cycles en cours, de manière à rattraper les nouveaux décalages de coordination. Deux cas peuvent se produire :

1er cas : On décide d'augmenter le cycle par exemple de 60 à 64 s. Les décalages de coordination principaux passent de 30 à 32 s. Le nouveau cycle est alors directement appliqué sur le carrefour l (Fig. A.19).

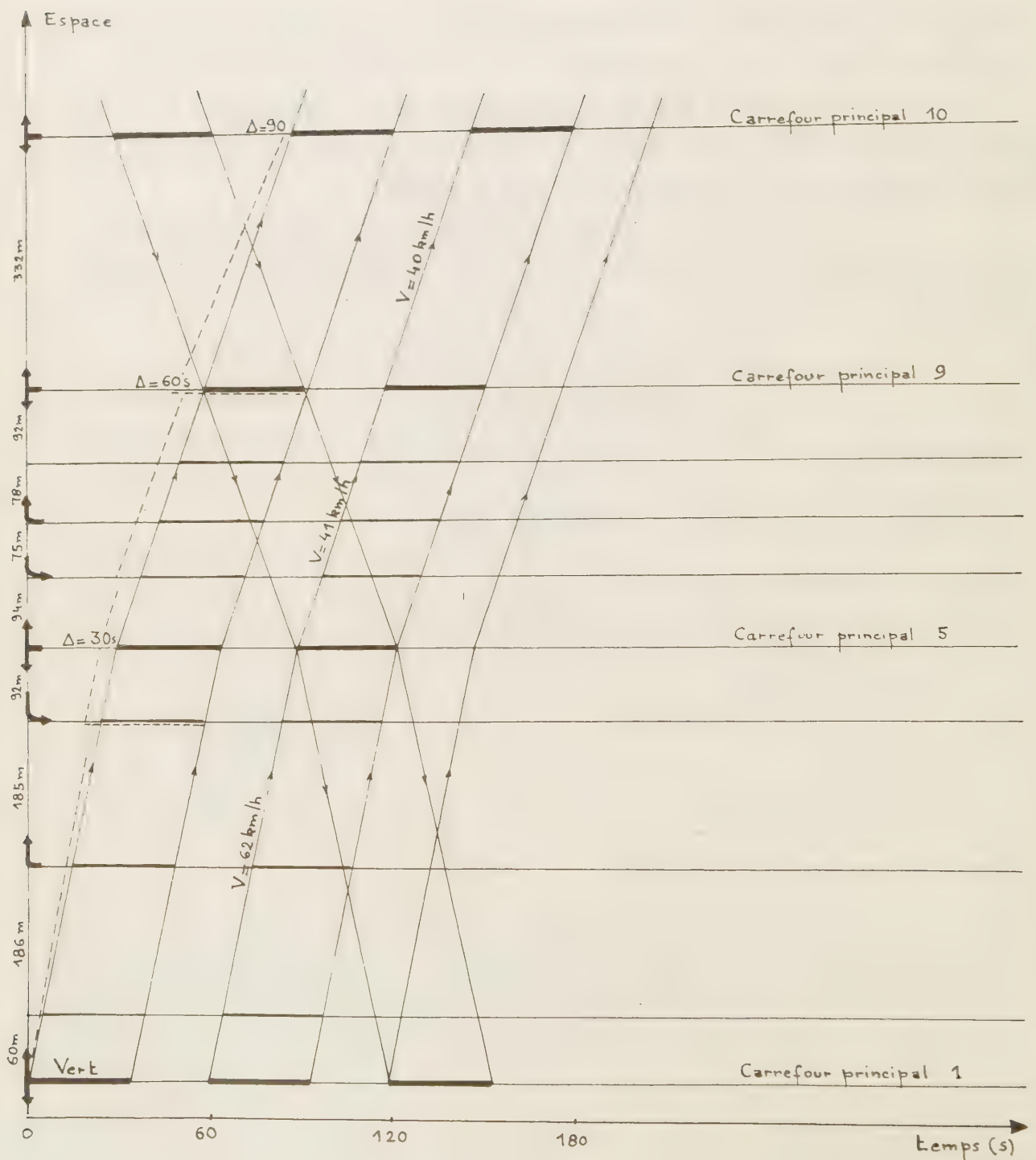
COORDINATION D'UN AXE

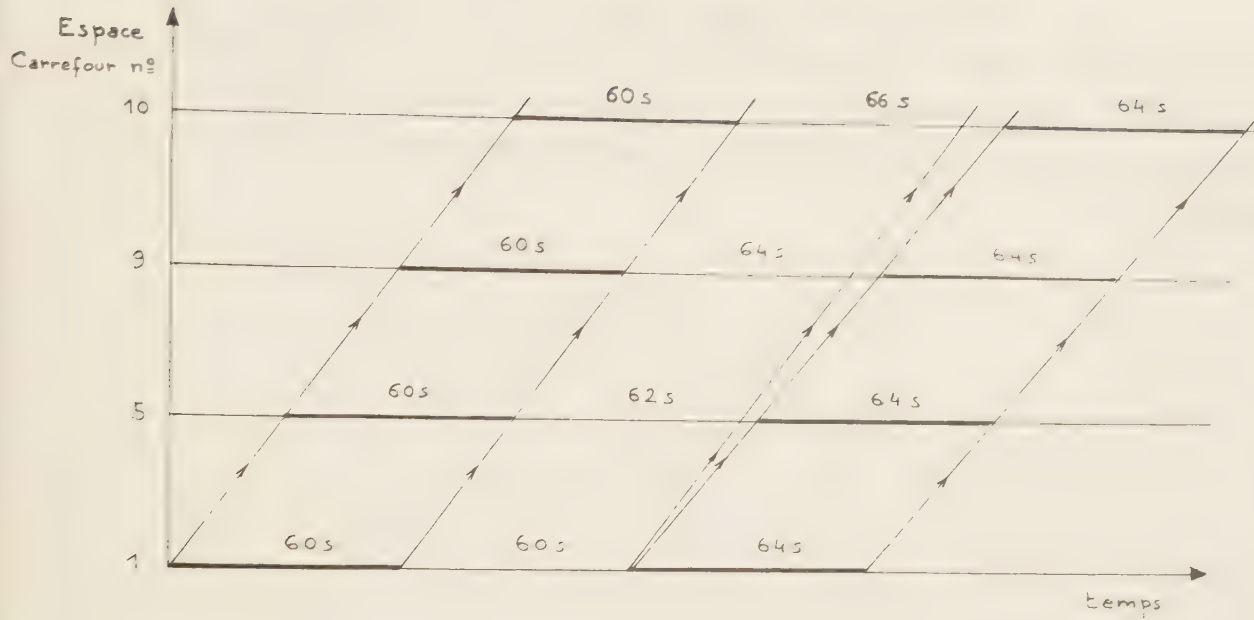
Cycle: 60 s

Vitesse globale de coordination : 48 km/h

Décalages de coordination principaux : 30 s

Vitesses de coordination : 62 km/h, 41 km/h, 40 km/h

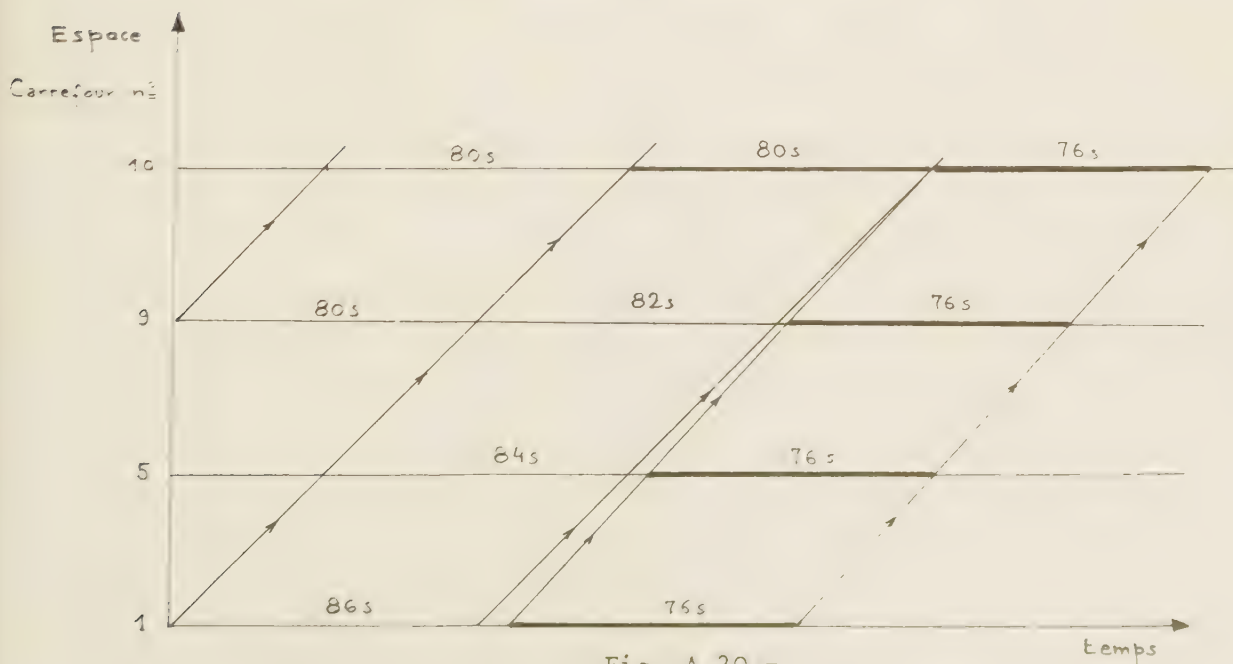




- Fig. A.19 -

On voit donc qu'il est nécessaire de prolonger les cycles en cours des carrefours 5, 9 et 10 respectivement de 2, 4 et 6 secondes.

2ème cas : On décide de diminuer le cycle, par exemple de 80 à 76 secondes. Les décalages de coordination passent alors de 40 à 38 s. La procédure est alors représentée figure A.20.



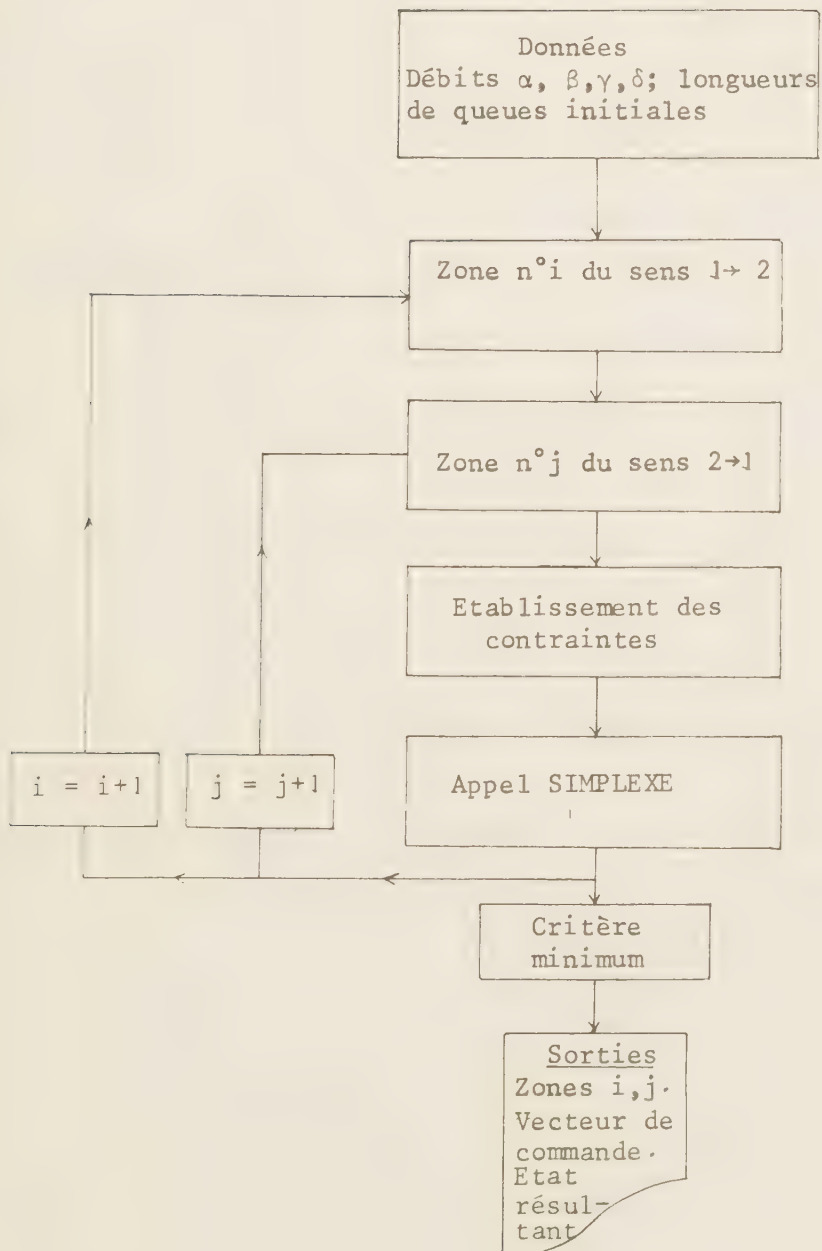
- Fig. A.20 -

Ici, le passage d'un cycle à l'autre occasionne des perturbations pour les carrefours 1, 5 et 9 qui voient leur cycle propre augmenté de 6, 4 et 2 secondes.

On voit donc que, lors d'une procédure de changement de cycle, s'établissent des régimes transitoires qui entravent l'application immédiate de la nouvelle valeur calculée. Ces transitoires ne durent pas plus d'un cycle, on ne devra donc pas recalculer trop souvent les nouvelles grandeurs de commande.

ANNEXE 1.2

ORGANIGRAMME



ANNEXE 2

Matrices ϕ' , H, Q, R de l'exemple étudié

Partition en sous-systèmes

Soit le vecteur d'état $\underline{X}_t$ défini par :

$$\underline{X}_t^T = \begin{bmatrix} X_t^1 & X_{t-1}^1 & Z_t^1 & Z_{t-1}^1 & Y_t^1 & Y_{t-1}^1 & \psi_{t-1}^1 & \vdots & X_t^2 & X_{t-1}^2 & \dots \end{bmatrix} \text{ de dimension } 28$$

et le vecteur de commande $\underline{U}_t$:

$$\underline{U}_t^T = \begin{bmatrix} \Delta\psi_t^1 & \Delta\phi_t^1 & \Delta\psi_t^2 & \Delta\phi_t^3 \end{bmatrix} \text{ de dimension } 4$$

Le problème de la régulation de 4 carrefours en ligne se pose en ces termes :

"Calculer $\underline{U}_t$ qui minimise le critère J

$$J = \sum_t^{t+N} (\underline{X}_t^T Q \underline{X}_t + \underline{U}_t^T R \underline{U}_t)$$

compte tenu de l'équation d'état :

$$\underline{X}_{t+1} = \phi' \underline{X}_t + H \underline{U}_t "$$

Nous allons préciser dans cette annexe, les matrices ϕ' , H, Q et R.

Matrice Q, R. Elles sont diagonales et ont pour valeur :

$$R = \alpha^2 \Pi \quad \text{où } \Pi \text{ est la matrice unité ,}$$

- . α^2 a été pris égal à 0,25,
- . $\dim R = (4,4)$.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

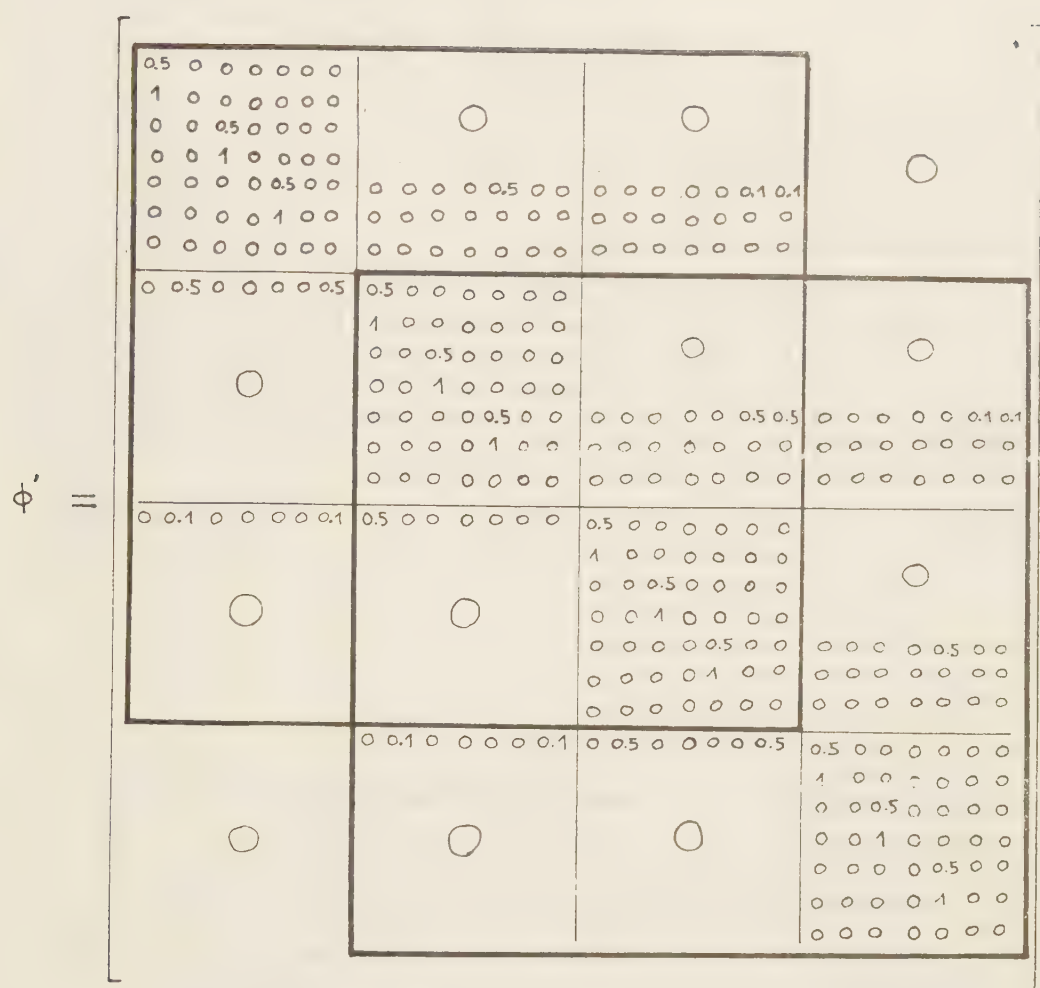
dim Q = (28,28)

avec $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrices H et ϕ'

$$H = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc} 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc} 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{bmatrix}$$

de dimension (28,4)



ϕ' est de dimension (28,28).

Méthode sous-optimale : Partition du système

On partitionne ce système de 4 carrefours en deux sous-systèmes en recouvrement comme l'indiquent les matrices ϕ' et H. Les états communs aux deux sous-systèmes seront affectés d'un coefficient de pondération $\frac{1}{2}$ dans les deux sous-critères.

Décomposition proposée d'un réseau quelconque

Cette décomposition est illustrée sur l'exemple d'un réseau comprenant 7 carrefours en ligne.

Les matrices ϕ' et H sont de la forme :

ϕ	A	B	O	O	O	O
E	ϕ	A	B	O	O	O
F	E	ϕ	A	B	O	O
O	F	E	ϕ	A	B	O
O	O	F	E	ϕ	A	B
O	O	O	F	E	ϕ	A
O	O	O	O	F	E	ϕ

α	β	O	O	O	O	O
O	α	O	O	O	O	O
O	γ	α	β	O	O	O
O	O	O	α	O	O	O
O	O	O	γ	α	β	O
O	O	O	O	O	α	O
O	O	O	O	O	γ	α

où les matrices ϕ , A, B, E, F sont précédemment définies et de dimension (7,7) et les matrices α , β , γ sont de dimension (7,1).

Cette décomposition est facilement généralisable à un nombre quelconque de carrefours. Remarquons que les carrefours extrêmes sont des cas particuliers puisqu'ils font intervenir deux commandes.

Les états en recouvrement seront affectés des poids 1, 0.5 ou $\frac{1}{3}$ suivant qu'ils appartiennent à 1, 2 ou 3 sous-systèmes.

- Annexe 3 -

```

C
C   CALCUL DE LA MATRICE S DE BOUCLAGE D UN SYSTEME DEFINI PAR:
C            $X(T+1) = P * X(T) + H * U(T)$ 
C   LE CRITERE D OPTIMISATION EST:
C           J= SOMME DE T A T+NMAX DE
C            $X(T)QX(T)+U(T)RU(T)$ 
C
      DIMENSION P(28,28),H(28,28),Q(28,28),R(4,4),A(28,28),HT(28,28)
      DIMENSION C(28,28),D(28,28),PT(28,28),X(28,28),PK(28),V(16)
      DIMENSION IS(4),IR(4)
100  FORMAT('1',10X,'LA MATRICE S EST')
101  FORMAT('///',10X,6(2X,E10.3,3X))
102  FORMAT('///',10X,'LE VECTEUR DE COMMANDE EST')
103  FORMAT('/',10X,4(E10.3,2X))
104  FORMAT('///',10X,'LE VECTEUR RESULTANT EST')
105  FORMAT('///',10X,6(2X,E10.3,3X))
C   LECTURE DES DONNEES
      M=28
      N=4
      NMAX=20
      DO 50 J=1,M
      DO 50 I=1,M
50   P(J,I)=0.
      P(1,1)=0.5
      P(2,1)=1.
      P(3,3)=0.5
      P(4,3)=1.
      P(5,5)=0.5
      P(6,5)=1.
      DO 51 K=1,3
      DO 51 I=1,6
      DO 51 J=1,6
      II=I+6*K
      IJ=J+6*K
51   P(II,IJ)=P(I,J)
      P(5,11)=0.5
      P(5,18)=0.1
      P(11,18)=0.5
      P(11,24)=0.1
      P(17,23)=0.5
      P(7,2)=0.5
      P(13,2)=0.1
      P(13,7)=0.5
      P(19,8)=0.1
      P(19,14)=0.5
      P(7,25)=0.5
      P(13,25)=0.1
      P(19,25)=0.1
      P(5,27)=0.1
      P(11,27)=0.5
      P(19,27)=0.5
      P(11,28)=0.1
      DO 52 I=1,M
      DO 52 J=1,N

```

19/04/74

FORTMAIN

```

52 H(I,J)=0.
   H(1,1)=-0.5
   H(3,1)=0.5
   H(5,1)=-0.5
   H(7,2)=-0.5
   H(9,2)=0.5
   H(11,2)=-0.5
   H(13,3)=-0.5
   H(15,3)=0.5
   H(17,3)=-0.5
   H(19,4)=-0.5
   H(21,4)=0.5
   H(23,4)=-0.5
   H(5,2)=0.5
   H(13,2)=0.5
   H(17,4)=0.5
   H(25,1)=1.
   H(26,2)=1.
   H(27,3)=1.
   H(28,4)=1.
DO 54 J=1,M
DO 54 I=1,M
54 Q(J,I)=0.
DO 55 J=1,24,2
55 Q(J,J)=1.
DO 56 J=1,N
DO 56 I=1,N
56 R(J,I)=0.
DO 57 J=1,N
57 R(J,J)=0.005

```

```

C
C   CALCUL DE LA MATRICE S DE BOUCLAGE
   IN=1
DO 1 J=1,M
DO 1 I=1,M
1 A(I,J)=0.
DO 2 J=1,M
DO 2 I=1,N
2 HT(I,J)=H(J,I)
DO 3 J=1,M
DO 3 I=1,M
3 PT(J,I)=P(I,J)
9 CALL PROMA(HT,A,C,N,M,M)
  CALL PROMA(C,H,D,N,M,N)
DO 4 I=1,N
DO 4 J=1,N
4 D(I,J)=D(I,J)+R(I,J)
DO 60 J=1,N
DO 60 I=1,N
  K=I+N*(J-1)
60 V(K)=D(I,J)
  CALL MINV(V,N,DT,IS,IR)
DO 61 J=1,N
DO 61 I=1,N

```

19/04/74

FORTMAIN

```

      K=I+(J-1)*N
61  D(I,J)=V(K)
      CALL PROMA(D,HT,C,N,N,M)
      CALL PROMA(C,A,D,N,M,M)
      IF(IN-NMAX)7,7,8
7   CALL PROMA(H,D,C,M,N,M)
      DO 5 J=1,M
5   C(J,J)=1-C(J,J)
      CALL PROMA(A,C,D,M,M,M)
      CALL PROMA(D,P,C,M,M,M)
      CALL PROMA(PT,C,D,M,M,M)
      DO 6 I=1,M
      DO 6 J=1,M
6   A(I,J)=D(I,J)+Q(I,J)
      IN=IN+1
      GO TO 9
8   CALL PROMA(D,P,C,N,M,M)
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,M
10  C(I,J)=-C(I,J)
      WRITE(3,100)
      DO 11 I=1,N
11  WRITE(3,101) (C(I,J),J=1,M)
C   PHASE DE SIMULATION
C
C   ETATS INITIAUX
      DO 12 J=1,M
12  X(J,1)=0.
      X(23,1)=8.
      IT=1
28  IF(IT-10)13,13,14
14  IF(IT-11)15,15,16
16  IF(IT-30)13,13,18
18  IF(IT-31)19,19,20
20  IF(IT-50)13,13,22
13  DO 25 I=1,M
25  PK(I)=0.
29  CALL PROMA(H,C,D,M,N,M)
      CALL PROMA(C,X,A,N,M,1)
      DO 26 J=1,M
      DO 26 I=1,M
26  D(J,I)=D(J,I)+P(J,I)
      CALL PROMA(D,X,PT,M,M,1)
      DO 27 J=1,M
27  X(J,1)=PT(J,1)+PK(J)
      WRITE(3,102)
      WRITE(3,103) (A(J,1),J=1,N)
      WRITE(3,104)
      WRITE(3,105) (X(J,1),J=1,M)
      IT=IT+1
      GO TO 28
15  PK(23)=15.
      PK(17)=8.
      GO TO 29
19  PK(9)=-6.
      GO TO 29
22  STOP
      END

```